

---

---

## Über $(n + 1)$ -Seite in $n$ -dimensionalen affinen Räumen

---

---

*Dem Gedenken an August Ferdinand Möbius gewidmet*

Bernulf Weißbach

Bernulf Weißbach wurde 1937 in Heidersdorf, Schlesien geboren. Er studierte an der Universität Jena. Seit 1961 ist er in Magdeburg tätig, wo er 1967 doktorierte und sich 1979 habilitierte. Nach der Wende 1992 wurde er zum Professor berufen. Er ist heute vornehmlich in der Lehrerbildung tätig. Seine mathematischen Interessen gehören der Geometrie in Räumen beliebiger endlicher Dimension. Ausserhalb der Mathematik beschäftigt er sich gerne mit Büchern und vor allem mit Arbeiten in seinem Garten.

### 1 Vorbemerkungen

“*Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*” nannte A. F. Möbius sein umfangreiches Werk, das 1827 in Leipzig erschien. Die baryzentrischen Koordinaten führen heute in manchen Lehrbüchern, in deren Titel auch von analytischer Geometrie die Rede ist, ein rechtes Schattendasein. Dabei sind sie ein außerordentlich nützliches Werkzeug, welches unter Umständen allen anderen noch in Frage kommenden Hilfsmitteln vorzuziehen ist.

“*Es werden durch solche Conceptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen und jedesmal neue Efforts (kleinere und größere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche . . .*” schrieb Carl Friedrich Gauß 1843 ([5]). Dies sollte auch in dieser Note, in der einige Beispiele zum Gebrauch der baryzentrischen Koordinaten zusammengestellt sind, deutlich werden.

Betrachtet werden Sätze aus der ebenen affinen Geometrie, die zumeist mit recht unterschiedlichen Hilfsmitteln bewiesen und kaum in einem Zusammenhang gesehen werden. Bemüht man sich um geeignete Verallgemeinerungen dieser Sätze zu Aussagen,

Bernulf Weißbach betrachtet in seinem Beitrag verschiedene klassische Sätze der ebenen Geometrie: den Satz von Menelaos, den Satz von E. Cesàro über Dreieckszwillinge und den Satz von Gauß über die Mitten der Diagonalen im vollständigen Vierseit. Seine Beweise mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten machen nicht nur den engen organischen Zusammenhang der drei Sätze deutlich, sondern zeigen auch Wege auf, wie diese auf affine Räume beliebiger Dimension verallgemeinert werden können. *bw/ust*

die in affinen Räumen beliebiger Dimension gültig sind, so zeigt sich einmal, daß die baryzentrischen Koordinaten ein sehr handliches Werkzeug darstellen, um solche Verallgemeinerungen zu gewinnen. Zum anderen wird der organische Zusammenhang der Sätze (insbesondere auch im ebenen Fall) deutlich.

Von den drei behandelten Sätzen, dem Satz des Menelaos, einem Satz von E. Cesàro und einem nach C. F. Gauß genannten Satz, wurde bisher wohl nur der erste auf Räume höherer Dimension übertragen. Sie zeigen, daß man auch in der affinen Geometrie auf einprägsame Sachverhalte trifft. Wie wesentlich dabei der Begriff des Volumens ist, wird in den Sätzen noch einmal besonders hervorgehoben.

## 2 Vereinbarungen

Im weiteren werden gewisse Mengen von Punkten in einem  $n$ -dimensionalen affinen Raum  $A^n$ ,  $n \geq 2$  betrachtet. Zu verschiedenen Sichten auf letzteren Begriff vergleiche man den anregenden Aufsatz von W. Heise und K. Sörensen [6]. Nach Auszeichnung eines Punktes als Ursprung kann  $A^n$  als ein reeller Vektorraum der Dimension  $n$  angesehen werden. Ist  $\{e_0, \dots, e_n\} \subset A^n$  eine affin unabhängige Menge, d. h. ist  $\{e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0\}$  linear unabhängig, so ist jeder Punkt  $x \in A^n$  auf genau eine Weise in der Form

$$x = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n, \quad \xi_0 + \dots + \xi_n = 1 \quad (1)$$

darstellbar. Unabhängige Mengen von weniger als  $n + 1$  Punkten legen auf die gleiche Weise affine Teilräume von  $A^n$  fest. Die reellen Zahlen  $\xi_i$  sind die baryzentrischen Koordinaten von  $x$  bezüglich der gegebenen unabhängigen Menge.

Ist  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset A^n$  eine affin unabhängige Menge, so ist die konvexe Hülle

$$S := \{x \in A^n : x = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, \dots, n\}$$

dieser Menge ein  $n$ -dimensionales Simplex. Ihm kommt ein  $n$ -dimensionales Volumen  $V_n(S) > 0$  zu. Wird das durch die Menge  $\{e_0, \dots, e_n\}$  festgelegte Simplex  $S_0$  zur Normung des Maßes genutzt, also  $V_n(S_0) = 1$  gesetzt, so kann das Volumen des Simplex  $S$  übersichtlich durch die baryzentrischen Koordinaten seiner Ecken  $x_i$  dargestellt werden. Mit

$$x_i = \xi_{i0} e_0 + \dots + \xi_{in} e_n, \quad \xi_{i0} + \dots + \xi_{in} = 1, \quad i = 0, \dots, n$$

wird

$$V_n(S) = |\det[\xi_{hk}]|. \quad (2)$$

Diese Beziehung, und die mit ihr verbundene Kennzeichnung der Koplanarität von  $\{x_0, \dots, x_n\}$  durch  $\det[\xi_{hk}] = 0$ , ist grundlegend für die späteren Ausführungen.

Der Menge  $\{e_0, \dots, e_n\} \subset A^n$ , die stets als zyklisch geordnet angesehen werden kann, lassen sich die  $n + 1$  Geraden zuweisen, die jeweils zwei aufeinanderfolgende Punkte verbinden. Für  $i = 0, \dots, n$  verbinde die Gerade  $G_i$  die Punkte  $e_i$  und  $e_{i+1}$ . Selbstverständlich ist hier und an entsprechenden späteren Stellen  $e_{n+1} = e_0$  zu setzen.

$$G_i = \{x \in A^n : x = \lambda_i e_i + \bar{\lambda}_i e_{i+1}, \lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1\}, \quad i = 0, \dots, n \quad (3)$$

Ist  $\{e_0, \dots, e_n\}$  affin unabhängig, so soll die Gesamtheit der auf diese Weise erklärten Geraden ein „normales“  $(n+1)$ -Seit mit den Seiten  $G_i$  und den Ecken  $e_i$  genannt werden. (Für  $n = 3$  spricht man zumeist von einem „schiefen“ Vierseit.)

Das Teilverhältnis  $\tau$ , welches einem geordneten Tripel  $(p_0, p_1, p_2)$  kollinearier Punkte mit  $p_1 \neq p_2$  zugewiesen ist, soll hier ausgehend von der Darstellung  $p_0 = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2$ ,  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , durch

$$\tau = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (4)$$

erklärt werden.

Die Figur 1 soll zur Erläuterung der Bezeichnungen dienen.

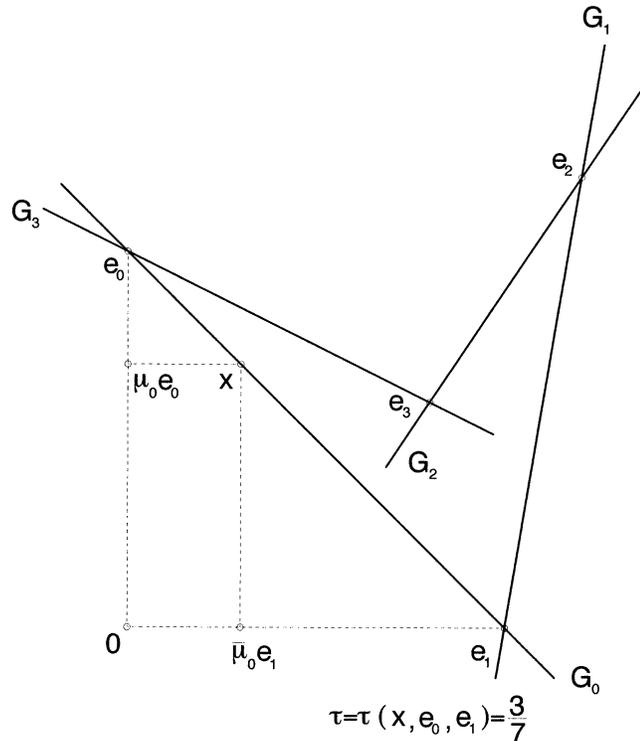


Fig. 1

### 3 Der Satz des Menelaos

Den bekannten Satz des Menelaos hat man schon vor geraumer Zeit auf Räume beliebiger Dimension ausgedehnt. Die Übertragung dieses Satzes der ebenen Geometrie auf den dreidimensionalen Raum erfolgte bereits gegen 1806 durch Lazare Nicolas Marguerite Carnot. (Man vergleiche N. Altshiller-Court [1] p. 127). Man kann den allgemeinen Satz im affinen Raum  $A^n$ , aber auch im projektiven Abschluß von  $A^n$  fassen. In letzterer

Form wurde er 1970 durch B. Budinský und Z. Nádenik [3] bewiesen. Unlängst haben B. Grünbaum und G. C. Shephard [6] einen sehr allgemeinen Satz über  $k$ -Seite im  $A^n$  angegeben, der als Sonderfälle nicht nur die Verallgemeinerung des Satzes von Menelaos sondern auch die des Satzes von Ceva und weiterer Inzidenzsätze umfaßt.

Die Übertragung des Satzes von Menelaos auf affine Räume beliebiger Dimension  $n \geq 2$  lautet:

**Satz 1** *Ist in jeder Seite  $G_i$  eines normalen  $(n+1)$ -Seits ein Punkt  $x_i$  gegeben, der nicht zu den Ecken dieses  $(n+1)$ -Seits gehört, so ist  $\{x_0, \dots, x_n\}$  genau dann koplanar, wenn die Teilverhältnisse  $\tau_i$  der Tripel  $(x_i, e_i, e_{i+1})$  der Bedingung  $\tau_0 \cdot \tau_1 \cdots \tau_n = (-1)^{n+1}$  genügen.*

Der Beweis liegt auf der Hand. Sind  $\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{in}$  die baryzentrischen Koordinaten des Punktes  $x_i$  bezüglich der unabhängigen Menge  $\{e_0, \dots, e_n\}$ , so ist  $\xi_{ii} =: \lambda_i$ ,  $\xi_{i,i+1} =: \bar{\lambda}_i$  mit  $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1$ , und alle übrigen baryzentrischen Koordinaten von  $x_i$  verschwinden. Die Menge  $\{x_0, \dots, x_n\}$  ist genau dann koplanar, wenn  $\det[\xi_{hk}] = 0$  gilt. Es wird

$$\det[\xi_{hk}] = \det \begin{bmatrix} \lambda_0 & \bar{\lambda}_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \bar{\lambda}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \bar{\lambda}_{n-1} \\ \bar{\lambda}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^n \lambda_i + (-1)^n \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i. \quad (5)$$

Da  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = 0, \dots, n$  gefordert wird, ergibt sich mit der in (4) enthaltenen Erklärung der Teilverhältnisse  $\tau_i$  sofort die Aussage des Satzes.

In Figur 2 wird versucht, den Sachverhalt für  $n = 3$ , also den Satz von Carnot, zu veranschaulichen. Es wurde  $\tau_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_3 = 2$  und  $\tau_0 = \tau_2 = 1$  gewählt.

Anzumerken wäre, daß sich das Volumen der konvexen Hülle  $S$  von  $\{x_0, \dots, x_n\}$  durch die Teilverhältnisse  $\tau_i$  darstellen läßt. Aus  $\tau_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i}$  mit  $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1$  folgt

$$\lambda_i = \frac{1}{1 + \tau_i}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\tau_i}{1 + \tau_i},$$

gemäß (2) mithin

$$V_n(S) = \frac{1}{\prod_{i=0}^n |1 + \tau_i|} \left| 1 + (-1)^n \prod_{i=0}^n \tau_i \right|. \quad (6)$$

Beachtung verdient hier der Fall  $\tau_i = 1$ ,  $i = 0, \dots, n$ , wenn es sich also bei den Punkten  $x_i$  um die „Seitenmitten“ des  $(n+1)$ -Seits handelt. In Räumen ungerader Dimension sind diese Seitenmitten koplanar, nicht jedoch bei gerader Dimension.

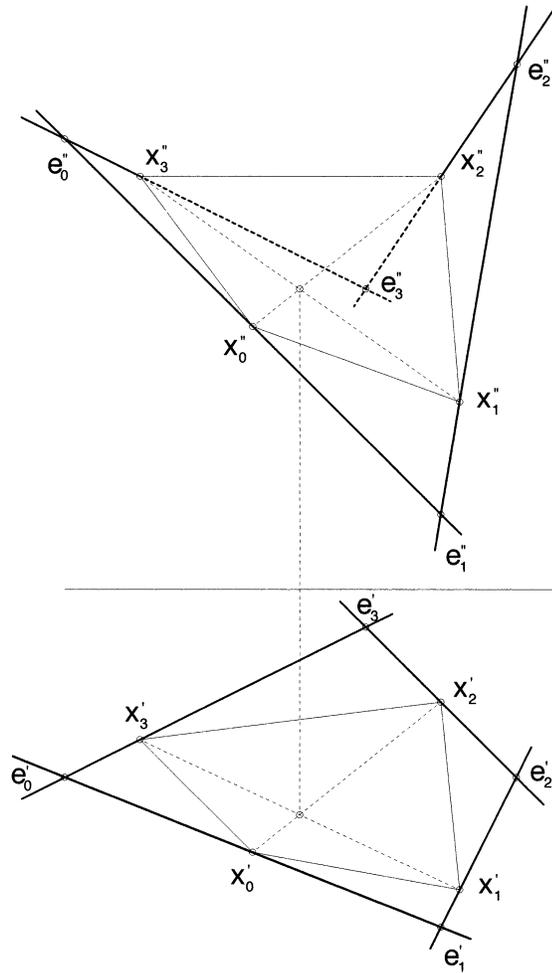


Fig. 2

#### 4 Zu einem Satz von E. Cesàro

Gemeinhin erinnert man sich beim Namen von Ernesto Cesàro an seine schönen Beiträge zur Theorie der unendlichen Reihen. E. Cesàro ist aber auch als Geometer bekannt. Zur mathematischen Folklore gehört heute der erste Teil eines Satzes, auf den er im Jahre 1875 aufmerksam machte. (Nach [2], p. 1229. Die dort genannte Quelle: *Nouv. Corr. Math.* 2 (1875), p. 429 konnte nicht aufgefunden werden.)

*“Einem Dreieck  $D$  seien zwei Dreiecke  $D^*$  und  $D^{**}$  derart eingeschrieben, daß ihre Ecken jeweils durch Spiegelung an den Seitenmitten von  $D$  ineinander übergehen. Die Dreiecke  $D^*$  und  $D^{**}$  sind dann flächengleich; die Strecke, die durch ihre Schwerpunkte begrenzt wird, hat den Schwerpunkt von  $D$  als Mittelpunkt.”*

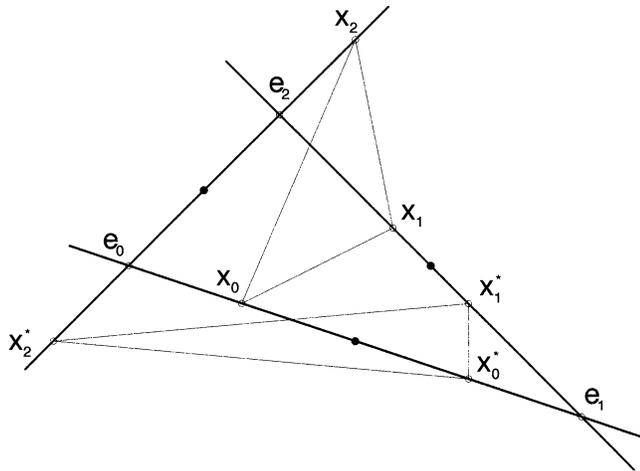


Fig. 3

Einbeschrieben meint hier selbstverständlich, daß jede Seite von  $D$  eine Ecke von  $D^*$  bzw.  $D^{**}$  enthält. Figur 3 zeigt ein Beispiel.

Zum Beweis wird heute fast immer folgender Weg vorgeschlagen: Da ein Satz der affinen Geometrie vorliegt, und alle Dreiecke affin äquivalent sind, braucht der Satz nur für ein gewisses Dreieck  $D$  bestätigt werden. Dieses Dreieck sei etwa das Dreieck, dessen Ecken die Koordinaten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  bezüglich einer orthonormierten Basis besitzen. Man wähle dann die Ecken von  $D^*$ , bestimme die Ecken von  $D^{**}$  und verifiziere die Behauptung. Dieses Vorgehen ist zwar durchaus ansprechend – der Rückgriff auf metrische Begriffe ist unwesentlich – zum Beweis der sich aufdrängenden Verallgemeinerung dürfte es sich aber kaum empfehlen.

Der Satz von Cesàro ist enthalten in

**Satz 2** *In jeder Seite  $G_i$  eines normalen  $(n+1)$ -Seits seien Punkte  $x_i$  und  $x_i^*$  gegeben, die durch Spiegelung an der entsprechenden Seitenmitte ineinander übergehen. Die konvexe Hülle der Menge  $\{x_0, \dots, x_n\}$  sei mit  $S$ , ihr Schwerpunkt mit  $s$  bezeichnet. Entsprechend sei  $S^*$  und  $s^*$  in Bezug auf  $\{x_0^*, \dots, x_n^*\}$  erklärt. Die Volumina von  $S$  und  $S^*$  stimmen dann überein. Die durch  $s$  und  $s^*$  begrenzte Strecke hat den Schwerpunkt von  $\{e_0, \dots, e_n\}$  zum Mittelpunkt.*

In Figur 4 wird die Lage der Punkte für  $n = 3$  veranschaulicht. Es soll nur die erste im Satz enthaltene Aussage bestätigt werden. Wie der *Beweis* zu führen ist, versteht sich nach den Ausführungen zum Satz von Menelaos von selbst. Zunächst hat man

$$x_i = \lambda_i e_i + \bar{\lambda}_i e_{i+1}, \quad \lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1, \quad x_i^* = \lambda_i^* e_i + \bar{\lambda}_i^* e_{i+1}, \quad \lambda_i^* + \bar{\lambda}_i^* = 1.$$

Aus der Forderung, daß die Paare  $(e_i, e_{i+1})$  und  $(x_i, x_i^*)$  den gleichen Mittelpunkt besitzen sollen, folgt

$$\frac{1}{2}e_i + \frac{1}{2}e_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + x_i^*) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_i^*)e_i + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i^*)e_{i+1}.$$

Aus  $\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_i^*) + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i^*) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \bar{\lambda}_i + \lambda_i^* + \bar{\lambda}_i^*) = 1$  schließt man über die Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten auf  $\lambda_i^* = 1 - \lambda_i = \bar{\lambda}_i$  und  $\bar{\lambda}_i^* = 1 - \bar{\lambda}_i = \lambda_i$ . Damit und mit (2) und (5) ergibt sich

$$V_n(S^*) = \left| \prod_{i=0}^n \lambda_i^* + (-1)^n \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i^* \right| = \left| \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i + (-1)^n \prod_{i=0}^n \lambda_i \right| = V_n(S),$$

womit bereits alles gezeigt ist.

Ist  $\{x_0, \dots, x_n\}$  koplanar, so trifft dies auch für  $\{x_0^*, \dots, x_n^*\}$  zu. Im Fall  $n = 3$  hat dies schon 1884 J. Neuberger mittels des Satzes von Carnot gezeigt ([1] pp. 129, 341). Naheliegenden Verallgemeinerungen des Satzes von E. Cesàro soll hier nicht weiter nachgegangen werden.

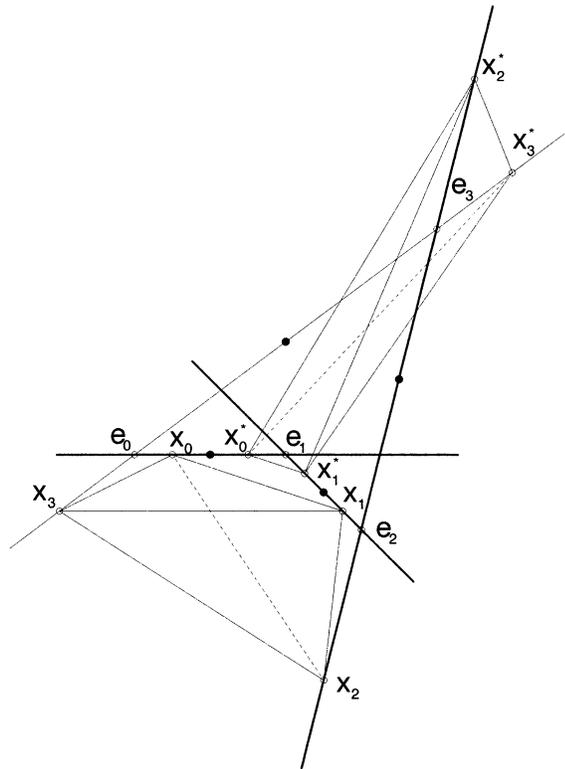


Fig. 4

## 5 Zu einem Satz von C. F. Gauß

L. N. M. Carnot, der bereits im Zusammenhang mit dem Satz von Menelaos genannt wurde, hat in die Geometrie den Begriff des vollständigen Vierseits eingebracht. Sind in

einer reellen projektiven Ebene vier Geraden  $\overline{G}_i$  gegeben, so sind ihnen über  $\overline{G}_h \cap \overline{G}_k =: \{x_{hk}\}$ ,  $0 \leq h < k \leq 3$  sechs Punkte  $x_{hk}$  zugewiesen, die sich zu drei Paaren  $\{x_{01}, x_{23}\}$ ,  $\{x_{02}, x_{13}\}$  und  $\{x_{03}, x_{12}\}$  von Gegenpunkten zusammenfassen lassen. In einer affinen Ebene muß noch Parallelität ausgeschlossen, das Vorhandensein der Punkte  $x_{hk}$  ausdrücklich gefordert werden. Mit diesen Begriffen läßt sich in aller Kürze ein Sachverhalt darstellen, den Carl Friedrich Gauß um 1810 bemerkte [4]:

*In einer reellen affinen Ebene sind die Mittelpunkte der drei Paare von Gegenpunkten eines vollständigen Vierseits kollinear.*

Um diesen Satz mit den bisher betrachteten Sätzen in Verbindung zu bringen, muß er als ein Satz über Dreiseite aufgefaßt werden. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten. Sie führen zu zwei verschiedenen Übertragungen auf normale  $(n+1)$ -Seite, von denen die eine die Bezüge des Satzes von C. F. Gauß zur projektiven Geometrie, die andere hingegen seinen affinen Charakter hervorhebt.

Ein Dreiseit ist mit jedem vollständigen Vierseit auf natürliche Weise verbunden. Es wird von den drei Geraden gebildet, die durch die drei Paare von Gegenpunkten bestimmt werden. Von diesen drei Geraden, den „Diagonalen“ des Vierseits, schneiden sich je zwei in dessen „Diagonalknoten“ und diese drei Punkte sind nicht kollinear. In affinen Ebenen können zwei Diagonalen parallel liegen. Dieser Fall soll ausgeschlossen werden. Auf jeder Diagonalen des Vierseits liegt dann ein Paar von Diagonalknoten und ein Paar von Gegenpunkten. Bekannterweise trennen diese Paare einander harmonisch.

Jetzt hat man nur noch festzuhalten, daß die drei ungeordneten Paare von Gegenpunkten sich stets (und zwar auf vierfache Weise) so ordnen lassen, daß die ersten Komponenten der drei geordneten Paare kollinear sind. Mithin kann man die Ecken aller vollständigen Vierseite ohne parallele Diagonalen wie folgt erhalten: Man schneide ein Dreiseit mit einer Geraden, die weder seine Ecken noch seine Seitenmitten trifft und bestimme dann auf jeder Seite den vierten harmonischen Punkt, der zur Trennung vom Paar der Ecken führt. Figur 5 zeigt den Sachverhalt und erläutert die anschließend verwendeten Bezeichnungen.

Offenbar läßt sich mit  $(n+1)$ -Seiten ähnlich verfahren. Man gelangt zu einer Übertragung einer geringfügigen Einschränkung des Satzes von Gauß auf Räume beliebiger Dimension in

**Satz 3** *Auf jeder Seite  $G_i$  eines normalen  $(n+1)$ -Seits sei ein Punkt  $x_i$  ausgewählt, der jedoch weder mit einer Ecke noch mit der jeweiligen Seitenmitte zusammenfällt. Der Punkt  $x_i^*$  sei danach so bestimmt, daß sich die Paare  $\{x_i, x_i^*\}$  und  $\{e_i, e_{i+1}\}$  harmonisch trennen. Ist dann  $\{x_0, \dots, x_n\}$  koplanar, so trifft dies auch für die Menge  $\{\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*), \frac{1}{2}(x_1 + x_1^*), \dots, \frac{1}{2}(x_n + x_n^*)\}$  zu.*

Für  $n = 2$  erkennt man hier den affinen Sonderfall einer allgemeineren projektiven Konfiguration. Der Punkt  $\frac{1}{2}(x_i + x_i^*)$  ist der vierte harmonische Punkt zu  $x_i, x_i^*$  und dem Schnittpunkt von  $G_i$  mit der Ferngeraden. Diese könnte nun durch eine beliebige Gerade ersetzt werden. Die sich danach ergebende projektive Fassung des Satzes von Gauß geht auf M. Chasles zurück ([8], p. 1004). Auch Satz 3 ließe eine rein projektive Verallgemeinerung zu. Wir begnügen uns jedoch mit dieser affinen Form.

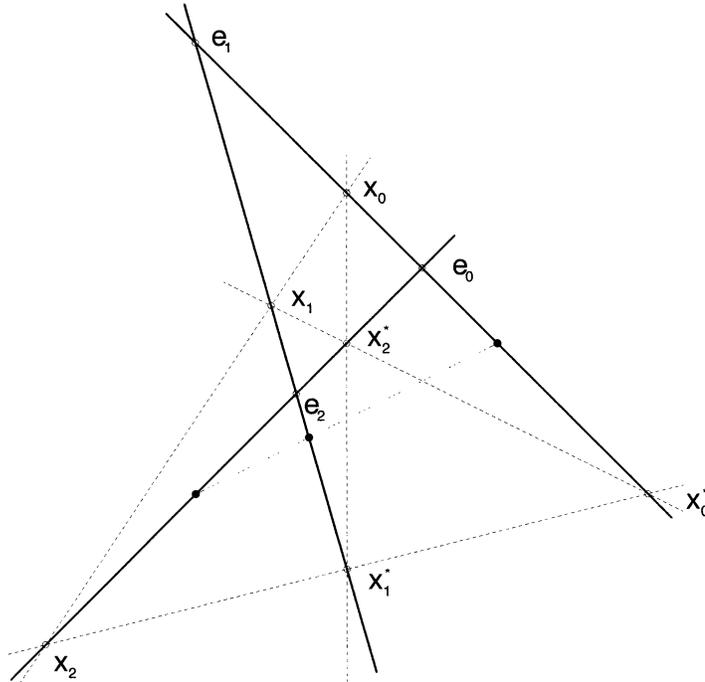


Fig. 5

Der *Beweis* geht wieder von den Darstellungen

$$x_i = \lambda_i e_i + \bar{\lambda}_i e_{i+1}, \quad \lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1, \quad x_i^* = \lambda_i^* e_i + \bar{\lambda}_i^* e_{i+1}, \quad \lambda_i^* + \bar{\lambda}_i^* = 1$$

aus. Es wird jetzt  $\lambda_i \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ ,  $i = 0, \dots, n$  vorausgesetzt. Für die Zahlen  $\lambda_i^*$  ist nur  $\lambda_i^* \notin \{0, 1\}$  zu fordern. Ist  $\tau_i$  das dem Tripel  $(x_i, e_i, e_{i+1})$  zugewiesene Teilverhältnis und gehört  $\tau_i^*$  entsprechend zu  $(x_i^*, e_i, e_{i+1})$ , so trennen die Paare  $\{e_i, e_{i+1}\}$  und  $\{x_i, x_i^*\}$  einander genau dann harmonisch, wenn  $\tau_i + \tau_i^* = 0$  gilt. Die Erklärung der Teilverhältnisse durch  $\tau_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i}$ ,  $\tau_i^* = \frac{\bar{\lambda}_i^*}{\lambda_i^*}$  führt auf die Kopplungen

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{2\lambda_i - 1}, \quad \bar{\lambda}_i^* = \frac{-\bar{\lambda}_i}{2\lambda_i - 1}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (7)$$

Ist  $m_i = \mu_i e_i + \bar{\mu}_i e_{i+1}$ ,  $\mu_i + \bar{\mu}_i = 1$  der Mittelpunkt des Punktepaars  $(x_i, x_i^*)$ , so gilt demgemäß

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_i^*) = \frac{\lambda_i^2}{2\lambda_i - 1}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i^*) = \frac{-\bar{\lambda}_i^2}{2\lambda_i - 1}. \quad (8)$$

Die Menge  $\{m_0, \dots, m_n\} = \{\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*), \dots, \frac{1}{2}(x_n + x_n^*)\}$  ist – man vergleiche (5) – koplanar für

$$0 = \prod_{i=0}^n \mu_i + (-1)^n \prod_{i=0}^n \bar{\mu}_i = \frac{1}{\prod_{i=0}^n (2\lambda_i - 1)} \left( \prod_{i=0}^n \lambda_i^2 - \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i^2 \right),$$

also für

$$\left( \prod_{i=0}^n \lambda_i \right)^2 = \left( \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i \right)^2. \quad (9)$$

Ist  $\{x_0, \dots, x_n\}$  koplanar, so gilt  $\prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i = (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^n \lambda_i$ , und (9) ist dann sicherlich erfüllt.

Man kann einem vollständigen Vierseit auch auf einfachere Weise als zuvor ein Dreieck zuordnen. Man braucht aus den Seiten  $\bar{G}_0, \bar{G}_1, \bar{G}_2$  und  $\bar{G}_4$  des Vierseits nur irgend drei auszuwählen. Die verbleibende Seite des Vierseits erscheint dann als eine Transversale aller Seiten des Dreiecks – man hat nichts anderes vor sich als die Konfiguration zum Satz des Menelaos. Will man nun zum Satz von Gauß gelangen, so bemerkt man, daß drei Punkten, die in den Seiten des Dreiecks liegen, drei andere Punkte zugewiesen werden, die Mittelpunkte und damit auch Schwerpunkte von Mengen sind, die jeweils den betrachteten Punkt und eine Ecke des Dreiecks enthalten. Figur 6 zeigt diese Sicht auf den Satz von Gauß.

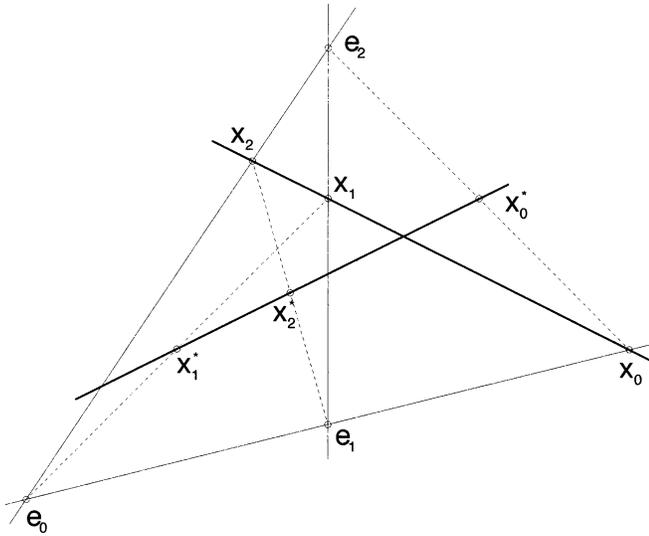


Fig. 6

Das Vorgehen läßt sich mühelos auf höhere Dimensionen übertragen. Man gelangt zu

**Satz 4** Auf jeder Seite  $G_i$  eines normalen  $(n+1)$ -Seits mit den Ecken  $e_i$  sei ein Punkt  $x_i$  beliebig gewählt. Es sei dann  $x_i^*$  der Schwerpunkt von  $\{x_i, e_0, \dots, e_n\} \setminus \{e_i, e_{i+1}\}$ . Sind  $S$  und  $S^*$  die konvexen Hüllen der Mengen  $\{x_0, \dots, x_n\}$  bzw.  $\{x_0^*, \dots, x_n^*\}$ , so gilt für ihre Volumina

$$V_n(S^*) = n^{-n} V_n(S). \quad (10)$$

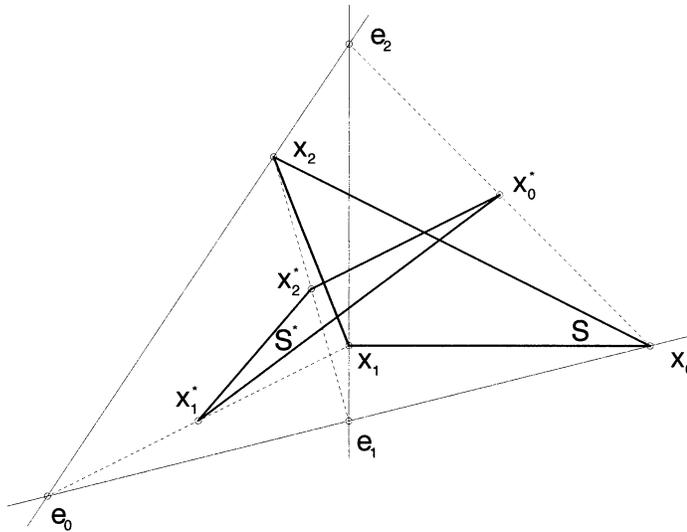


Fig. 7

Schon im Fall  $n = 2$  liefert dieser Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von Gauß. Dies zeigt der Vergleich von Figur 6 mit Figur 7.

Zum *Beweis* wird wie zuvor die Darstellung  $x_i = \lambda_i e_i + \bar{\lambda}_i e_{i+1}$ ,  $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 1$  genutzt. Es wird dann

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{1}{n} e_0 + \cdots + \frac{1}{n} e_{i-1} + \frac{1}{n} (\lambda_i e_i + \bar{\lambda}_i e_{i+1}) + \frac{1}{n} e_{i+2} + \cdots + \frac{1}{n} e_n \\ &= \frac{1}{n} e_0 + \cdots + \frac{1}{n} e_{i-1} + \frac{\lambda_i}{n} e_i + \frac{\bar{\lambda}_i}{n} e_{i+1} + \frac{1}{n} e_{i+2} + \cdots + \frac{1}{n} e_n. \end{aligned}$$

Ersichtlich liefert die Summe aller Koeffizienten der Punkte  $e_i$  den Wert  $+1$ , es handelt sich also um die baryzentrischen Koordinaten  $\xi_{ij}^*$  der Punkte  $x_i^*$  bezüglich der affinen Basis  $\{e_0, \dots, e_n\}$ . Man hat mithin zunächst

$$\det[\xi_{hk}^*] = \frac{1}{n^{n+1}} \det \begin{bmatrix} \lambda_0 & \bar{\lambda}_0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \bar{\lambda}_1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda_{n-1} & \bar{\lambda}_{n-1} \\ \bar{\lambda}_n & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Jetzt addiere man in dieser Determinante alle Spalten zur letzten hinzu. Dann steht dort überall  $n$ . Dieser Faktor kann herausgehoben werden. In der letzten Spalte steht danach überall  $1$ . Zieht man sie von allen übrigen Spalten ab, so ergibt sich wegen  $\lambda_i - 1 = -\bar{\lambda}_i$

und  $\bar{\lambda}_i - 1 = -\lambda_i$  die Darstellung

$$\det[\xi_{hk}^*] = \frac{1}{n^n} \det \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}_0 & -\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\lambda}_1 & -\lambda_1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{\lambda}_{n-1} & 1 \\ \bar{\lambda}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Addiert man wiederum alle Spalten zur letzten hinzu, so gewinnt man schließlich

$$\det[\xi_{hk}^*] = \frac{1}{n^n} \det \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}_0 & -\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}_1 & -\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{\lambda}_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ -\lambda_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}.$$

Nach diesen Umformungen kann die Determinante leicht berechnet werden. Man erhält

$$V_n(S^*) = |\det[\xi_{hk}^*]| = \frac{1}{n^n} \left| (-1)^n \prod_{i=0}^n \bar{\lambda}_i + (-1)^{2n} \prod_{i=0}^n \lambda_i \right| = \frac{1}{n^n} V_n(S)$$

und gewinnt Satz 4.

## Literatur

- [1] Altshiller-Court, N.: Modern Pure Solid Geometry, Chelsea Publ. Comp. New York 1964.
- [2] Berkhan, G. und Meyer, W. F.: Neuere Dreiecksgeometrie, Encyklopädie der Math. Wissenschaften, III AB 10 Leipzig (1914–1931); 1173–1276.
- [3] Budinský, B. und Nádenik, Z.: Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva, Casopis pro pěstování matematiky, 97 (1972); 75–77.
- [4] Gauß, C. F.: Bestimmung der größten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berühren, Werke, Bd. IV, Leipzig 1880, 385–392.
- [5] Gauß, C. F.: Werke Bd. VIII, Leipzig 1900; 297–298.
- [6] Grünbaum, B. und Shephard, G. C.: Ceva, Menelaus and Selftransversality, Geometriae Dedicata 65(1997), 179–192.
- [7] Heise, W. und Sörensen, K.: Was Sie schon immer über affine Punkträume wissen wollten *oder* Keine Angst vor Translationen, Journal of Geometry 41 (1991), 58–71.
- [8] Zacharias, M.: Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, Encyklopädie der Math. Wissenschaften III AB 9 Leipzig (1914–1931), 859–1172.

Bernulf Weißbach

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Fakultät für Mathematik

Institut für Algebra und Geometrie

PSF 41 20

D-39016 Magdeburg