
Bücher und Computersoftware

G. Toth: Glimpses of Algebra and Geometry. Undergraduate Texts in Mathematics. xviii + 308 Seiten, sFr. 62.–. Springer, Berlin u.a. 1998; ISBN 0-387-98213-2.

Ces *instantanés d'algèbre et de géométrie* proposent un large éventail de thèmes mathématiques marquants, que l'enseignant n'a bien souvent guère l'occasion de les aborder tous au cours de sa formation universitaire.

Cette abondante matière est répartie en 23 chapitres, d'inégale longueur, dans un ouvrage relié de quelque 300 pages; la liste de leurs titres donne déjà une première idée du contenu du livre que Gabor Toth dédie utilement au perfectionnement des maîtres de mathématiques:

- | | |
|--|---|
| 1 <i>A number is a multitude composed of units</i>
– Euclid | 13 <i>Out of nothing I have created a new universe</i> – Bolyai |
| 2 <i>...there are no irrational numbers at all</i> – Kronecker | 14 Fuchsian groups |
| 3 Rationality, elliptic curves and Fermat's last theorem | 15 Riemann surfaces |
| 4 Algebraic or transcendental? | 16 General surfaces |
| 5 Complex numbers | 17 The five platonic solids |
| 6 Complex arithmetic | 18 Detour in topology: Euler-Poincaré characteristic |
| 7 Stereographic projection | 19 Detour in graph theory: Euler, Hamilton and the four color theorem |
| 8 Proof of the fundamental theorem of algebra | 20 Dimension leap |
| 9 Symmetries of regular polygons | 21 Quaternions |
| 10 Discrete groups of $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ | 22 Back to \mathbb{R}^3 |
| 11 Möbius geometry | 23 The fourth dimension |
| 12 Complex linear fractional transformations | |

De plus, quatre brefs appendices précisent la terminologie de référence, sous la forme de résumés succincts:

A Sets, B Groups, C Topology, D Smooth Maps

Le texte, d'une typographie dont la lecture est agréable, est judicieusement accompagné d'illustrations claires, dont certaines sont en couleurs. Initiative bienvenue, des logos faciles à reconnaître – *trèfle, carreau, coeur et pique* – annoncent le niveau des prérequis nécessaires à une parfaite compréhension de certains passages de l'exposé.

En préface, l'auteur mentionne une dizaine d'ouvrages qui l'ont tout particulièrement influencé dans l'élaboration de son propre texte. A la fin d'une douzaine de chapitres, plusieurs sites Internet (Web) communiqués sont susceptibles d'offrir des informations complémentaires sur des sujets déterminés.

Chaque chapitre comporte une liste de problèmes bien choisis qui, souvent, apportent d'utiles compléments ou incitent à la réflexion personnelle du lecteur. Par exemple, à la fin du premier chapitre, consacré à une rapide revue sur la divisibilité des entiers et aux congruences, l'exercice 5 propose de *montrer que le nombre premier p divise le numérateur de la somme* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(p-1)}$ – et non de la somme $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{(p-1)^2}$ comme imprimé par erreur.

Le style de Gabor Toth est plutôt discursif et offre maintes occasions de rencontrer un *instantané* apportant, qui un éclairage inattendu sur une question familière, qui une indication historique ou biographique moins connue. Lorsque l'argumentation se fait plus brève, l'auteur ne laisse pas tomber son lecteur pour autant, mais lui tend la perche par une référence bibliographique précise.

La présentation très modulaire de cet ouvrage permet d'en aborder la lecture de bien des manières différentes.

Un seul chapitre peut déjà livrer des informations substantielles. Par exemple, une démonstration de l'irrationalité de π ainsi qu'un aperçu sur des approximations rationnelles de ce fameux nombre situées dans leur contexte historique (chap. 2). Ou encore les raisons pour lesquelles on ne peut généraliser à n'importe quelle dimension $n > 2$ le produit des nombres complexes, une application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2 , dont les propriétés sont si appréciées en algèbre, géométrie et analyse (chap. 20).

Certains enchaînements de plusieurs chapitres, consécutifs ou non, peuvent présenter encore davantage d'intérêt. C'est évidemment le cas des chapitres 5, 6, 7 et 8, dont les titres sont suffisamment explicites. C'est encore le cas de la détermination des sous-groupes finis du groupe des isométries du plan (chap. 9), suivie de la classification des groupes de frises et groupes de paveurs, établie de manière rigoureuse en 1924 par George Polya, mais que les architectes maures de l'Alhambra de Grenade connaissaient déjà.

La décomposition des isométries du plan en produits de symétries axiales (chap. 9) conduit, par le truchement de la projection stéréographique (chap. 7) à une généralisation des isométries étendue par Möbius aux droites et aux cercles (chap. 11). Le groupe des transformations de Möbius, qui contient celui des isométries du plan, est alors isomorphe au groupe des transformations homographiques du plan complexe, groupe qui est lui-même représenté par un groupe de matrices particulières (chap. 20).

Pour conclure cette saga, le modèle de Poincaré, motivé de manière très suggestive (p. 116), conduit enfin à une géométrie dite hyperbolique qui, comme on le sait, renie l'axiome des parallèles de la géométrie euclidienne (chap. 13).

Le copieux chap. 17, terminé par une liste de 22 problèmes, est consacré aux polyèdres réguliers. Etendant à l'espace la méthode développée au chap. 9, il conduit tout naturellement à la classification des sous-groupes finis du groupe des isométries directes de l'espace. Les incidences topologiques du théorème d'Euler sur les polyèdres convexes sont exploitées au chap. 19, tandis que le chapitre suivant relie ce fameux théorème à la théorie des graphes.

Cette modeste recension ne saurait évidemment donner qu'une idée bien incomplète de la très grande richesse des *Glimpses of Algebra and Geometry* de Gabor Toth; un ouvrage vraiment stimulant que l'on peut chaleureusement recommander à tous ceux qui aiment cultiver le goût des belles perspectives mathématiques.

P. Bolli, Le Vaud

J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp: The Interactive Geometry Software Cinderella. 143 Seiten, mit CD-ROM, sFr. 85.–. Springer, Berlin u.a. 1999; ISBN 3-540-14719-5.

Das Software-Paket Cinderella für dynamische Geometrie umfasst ein knappes, aber übersichtliches Handbuch in englischer Sprache und eine CD-ROM mit Software für alle gängigen Plattformen. Die Installation erfolgt selbsterklärend und funktioniert bei den getesteten schulrelevanten Betriebssystemen (MacOS, Windows) auf Anhieb. Dabei kann die Software wahlweise mit englischer oder deutscher Benutzeroberfläche verwendet werden. Da Cinderella in Java implementiert worden ist, benötigt man eine virtuelle Java-Maschine, welche ebenfalls mitgeliefert wird.

Aus der mittlerweile stattlichen Zahl von dynamischen Geometriesystemen (Cabri-géomètre, Geometer's Sketchpad, Euklid, etc.) ragt Cinderella in verschiedener Hinsicht hervor: Die erwähnte Plattformunabhängigkeit und die Kompatibilität der Dateien (Konstruktionen) erleichtert den Austausch von Materialien im Schulbereich. Besonders aktuell ist auch die Fähigkeit, interaktive Übungsaufgaben mit eingebauten Hilfestellungen und Lösungen zu generieren, welche schliesslich als Java-Applets in Webseiten eingebunden werden können. Neben dem Konstruieren in der Euklidischen Ebene ist auch das Arbeiten in Nicht-Euklidischen Geometrien möglich. Für den Anfänger besonders eindrücklich sind die simultanen Ansichten derselben Objekte in verschiedenen Zeichenebenen. Der gymnasiale Unterricht erhält dadurch zumindest für den Wahlbereich einen motivierenden Anstoss.

Das Handbuch ist nebst softwarespezifischen Hinweisen auch mit interessanten Informationen zum mathematischen Hintergrund von Cinderella ausgestattet. Die Verwendung von homogenen Koordinaten überrascht angesichts der geschilderten Möglichkeiten nicht, bemerkenswert sind die Ausführungen über ein Stetigkeitsprinzip

in der dynamischen Geometrie, wonach eine stetige Veränderung eines freien Objekts keine Inkonsistenzen (“springende” Punkte, etc.) bei den abhängigen Objekten hervorrufen darf. Eine wesentliche Konsequenz sind die im Vergleich zu anderen Systemen “vollständigen” Ortskurven.

Für den Gebrauch von Cinderella im Unterricht der Sekundarstufen I und II sind einige Konsequenzen zu beachten: Wegen der relativen Langsamkeit von Java-Programmen und des rechenintensiven mathematischen Hintergrunds werden einige Ansprüche an die Hardware gestellt, um eine befriedigende Performance im Zugmodus zu erreichen. Die ästhetisch sehr ansprechende Benutzeroberfläche des Programms ist Java-bedingt etwas gewöhnungsbedürftig, die Palette der Operationen erscheint mir nicht unbedingt übersichtlich. Als Hauptmangel gegenüber den bestehenden Computer-Geometrie-Systemen empfinde ich jedoch die fehlende Möglichkeit, wiederkehrende Konstruktionen interaktiv als Makros zu erzeugen und abzuspeichern, was gerade im Planimetrie-Unterricht an Gymnasien den Reiz solcher Programme ausmacht. Dieser Mangel soll jedoch in einer nächsten Version behoben werden.

Insgesamt ist Cinderella mit seinem fundierten mathematischen Hintergrund als zukunftsweisende Software zu bewerten, welche bei entsprechender Erweiterung auch im 3D-Bereich erfolgreich sein könnte.

H. Klemenz, Winterthur

Anmerkung der Redaktion: In der Zwischenzeit ist beim Klett-Verlag eine Schulversion in deutscher Sprache erschienen (ISBN 3-12-136095-7).

J. Sesiano: Une introduction à l'histoire de l'algèbre. Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance. viii + 168 Seiten, sFr. 39.–. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 1999; ISBN 2-88074-406-7

Die Geschichte der Algebra beginnt, je nachdem was man unter dem Begriff “Algebra” genau verstehen will, entweder bereits im Altertum, im Mittelalter, der Renaissance oder gar erst in der Moderne. So findet man schon bei den Babyloniern eine sogenannte “arithmetische Algebra”, wo quadratische Gleichungen anhand konkreter Zahlenbeispiele nach einem zwar systematischen, in den Texten jedoch nie näher spezifizierten Verfahren aufgelöst werden. Bei den alten Griechen und den Arabern spricht man andererseits häufig von einer “geometrischen Algebra”, indem algebraische Sachverhalte durch Transposition ins Geometrische veranschaulicht bzw. gelöst werden. Noch später ist die Herausbildung der heutigen Symbol-Algebra sowie der modernen Struktur-Algebra anzusetzen, die erst in Descartes’ berühmter *Géométrie* (1637) und van der Waerdens *Algebra* (1930/31) ihren ersten krönenden Abschluss fanden.

Der Autor behandelt den ersten Teil dieser Entwicklung bis etwa um 1600, zu deren Erforschung er in zahlreichen Einzelpublikationen selbst Wesentliches beigetragen hat. Im Zentrum stehen die Auflösung der algebraischen Gleichungen und die damit verbundenen sukzessiven Erweiterungen des Zahlenbereichs. Besprochen werden die algebraischen Keilschrifttexte der Babylonier, die nur verstreut überlieferten frühen algebraischen Probleme bei den Griechen sowie die spätere *Arithmetica* von Diophantos. Alsdann widmet er sich den arabischen Schriften zur Algebra (al-Ĥwārizmī, Abū Kāmil, Ūmar al-Ĥaiyām). Danach würdigt er die Überlieferung dieser Algebra nach Spanien (Liber mahameleth) und Sizilien (Friedrich II., Leonardo Fibonacci) im Zuge der Übersetzungen im Hochmittelalter und erörtert abschliessend deren weitere Entwicklungen in Mitteleuropa durch Nicolas Chuquet, Luca Pacioli, Bombelli, Tartaglia und Cardano.

Das vorliegende Werk bezweckt nicht, eine erschöpfende Darstellung der Geschichte der Algebra zu liefern; Ziel ist vielmehr die Darlegung einiger zentraler Etappen ihrer Entwicklung. Ein wesentliches Verdienst ist sicher, dass der Autor den Leser stets an die Originaltexte heranführt, die jeweils zuerst in einer wörtlichen Übersetzung, sodann in einer rechnermässig abstrahierten Umschrift und zuletzt in einer modernen Interpretation vorgestellt werden. Des Weiteren sind sämtliche Quellentexte in einem Anhang sogar in der Originalsprache wiedergegeben. Der Autor versucht damit, dem Leser den Zugang zu den alten Texten zu erleichtern und erreicht durch die historisch-kritische stufenweise Transposition der Texte Einsicht in die mathematische Denkweise unserer Vorfahren. Der Leser wird dadurch quasi als Begleiter in den mathemathikhistorischen Forschungsprozess miteinbezogen und zu eigenem Nachdenken angeregt. Somit kann das insgesamt sehr sorgfältig recherchierte Werk auch historisch interessierten Fachmathematikern und vor allem Mathematiklehrern wärmstens empfohlen werden.

E. Neuenschwander, Zürich