

---

---

## Über das $3n + 1$ Problem

---

---

Günther J. Wirsching

Günther Wirsching wurde 1960 in Würzburg geboren. Er studierte 1979 bis 1985 in München und Bonn Mathematik, Physik und Philosophie. Seine Forschungen in der Mathematik begann er mit einer Diplomarbeit zur homologischen Algebra und Kategorientheorie. Im Frühjahr 1990 wurde er in Eichstätt mit einer Dissertation zur Differentialgeometrie promoviert. Danach wandte er sich verstärkt der diskreten Mathematik und insbesondere den diskreten dynamischen Systemen zu. Seit 1996 arbeitet er an der Universität Eichstätt als Dozent für Mathematik. In seiner Freizeit spielt er oft klassische Musik auf seiner Gitarre.

Zu den interessantesten mathematischen Problemen gehören zweifellos diejenigen, die einfach zu formulieren sind, aber dennoch für lange Zeit allen Anstrengungen zu ihrer Lösung widerstehen. Von dieser Art ist das folgende  $3n + 1$  Problem: Sei

$$(1) \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für gerade } n, \\ 3n + 1 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Wählt man eine Startzahl  $s \in \mathbb{N}$ , so erhält man durch Iteration von  $f$  die sogenannte  $f$ -Trajektorie der gewählten Startzahl  $s$ :

$$\mathcal{T}_f(s) := (s, f(s), f(f(s)), \dots, f^k(s), \dots).$$

Beispielsweise ergibt  $s = 13$  die  $f$ -Trajektorie

$$\mathcal{T}_f(13) = (13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots),$$

die sich offensichtlich periodisch fortsetzt, mit der Periode  $(4, 2, 1)$ . Verblüffenderweise haben alle Startzahlen, die bis jetzt getestet wurden, diese Eigenschaft, daß ihre

Wie der Autor des nachfolgenden Beitrags einleitend bemerkt, gehört das  $3n + 1$  Problem zu denjenigen interessanten mathematischen Fragestellungen, welche sich einfach formulieren lassen, aber dennoch für lange Zeit allen Anstrengungen zu ihrer Lösung widerstehen. In seinem Beitrag gibt G.J. Wirsching eine leicht verständliche Einführung in das  $3n + 1$  Problem, er stellt weiter eine sehr schöne Übersicht über zum Teil unerwartete Zusammenhänge der  $3n + 1$  Vermutung mit anderen Vermutungen zusammen und führt schliesslich den Leser an die aktuelle Forschung zu diesem Problem heran.

*jk*

$f$ -Trajektorie mit der Periode  $(4, 2, 1)$  endet. Diese Beobachtung führt fast unweigerlich zu der bis heute noch nicht bewiesenen

**$3n + 1$  Vermutung** Zu jeder Startzahl  $s \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n(s) = 1$ .

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Startzahl  $s = 27$ : ihre  $f$ -Trajektorie steigt nach 70 Schritten auf das Maximum  $f^{70}(27) = 9232$ , erst nach 111 Schritten erreicht sie die Zahl 1. Die Trajektorie der Startzahl 27 hat ein extremes Verhalten; es wäre interessant zu wissen, für welche Startzahlen die  $f$ -Trajektorie sich sonst noch irgendwie extrem verhält. G.T. Leavens und M. Vermeulen sind vor ein paar Jahren einigen dieser Fragen mit sorgfältiger Begriffsbildung und Computerhilfe ein Stück weit nachgegangen [11]. Sie nennen eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine *Spitze* (*peak*) einer Funktion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , wenn  $\varphi(n) > \varphi(k)$  für  $k < n$  gilt. Uns interessieren hier etwa die Funktionen

$$\begin{aligned} \text{max\_value}(n) &:= \sup\{f^k(n) : k \in \mathbb{N}_0\}, \\ \text{steps}(n) &:= \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : f^k(n) = 1\}. \end{aligned}$$

(Läßt man  $+\infty$  als Funktionswert zu, und vereinbart man  $\inf \emptyset = +\infty$ , so sind  $\text{steps}(n)$  und  $\text{max\_value}(n)$  auch dann wohldefiniert, wenn die  $3n+1$  Vermutung falsch sein sollte.) Leavens und Vermeulen haben nun insgesamt etwa 10 CPU-Jahre Rechenzeit – parallel auf verschiedenen Maschinen – dafür aufgewendet, Spitzen verschiedener Funktionen  $\varphi$  zu bestimmen, darunter  $\text{max\_value}$  und  $\text{steps}$ . Beispielsweise sind folgende alle Zahlen  $< 5$  Millionen, die sowohl bez.  $\text{max\_value}$  als auch bez.  $\text{steps}$  Spitzen sind [11]:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 7, \quad 27, \quad 703, \quad 26\,623.$$

Insgesamt fanden sie im Bereich  $n < 5\,000\,000$  genau 34 Spitzen von  $\text{max\_value}$  und 51 Spitzen von  $\text{steps}$ .

## 1 Collatz-Graphen und der Ursprung der $3n + 1$ Vermutung

Der Ursprung der  $3n + 1$  Vermutung ist nicht präzise datierbar, da uns keine schriftlichen Quellen aus der mutmaßlichen Entstehungszeit – etwa Anfang der 30er Jahre unseres Jahrhunderts – vorliegen. Andererseits ist es ziemlich plausibel, daß dieses Problem auf Lothar Collatz zurückgeht: von ihm stammt nämlich eine 1986 in China (und auf chinesisch) publizierte Arbeit [4] (Prof. Meinardus aus Mannheim hat mir freundlicherweise eine Kopie dieser chinesischen Arbeit sowie eine posthum angefertigte deutsche Rückübersetzung zur Verfügung gestellt), in der er seinen heuristischen Weg zur  $3n + 1$  Vermutung beschreibt. Danach begann er damit, Funktionen  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch Graphen zu repräsentieren. Dabei stellte er sich den Definitionsbereich  $D := \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  als Eckenmenge vor und dachte sich für jedes  $n \in D$  einen Pfeil von  $n$  nach  $g(n)$  gezeichnet. Dieser (gerichtete) Graph, bezeichnen wir ihn mit  $\Gamma_g$ , wurde später von J.C. Lagarias *Collatz-Graph* von  $g$  genannt [10]. Die  $g$ -Trajektorien, d.h. die Folgen natürlicher Zahlen, die aus einer Startzahl durch wiederholtes Ausführen von  $g$  entstehen, sind dann gerade die (einseitig nach rechts) unendlich langen Wege im Collatz-Graphen  $\Gamma_g$ .

Collatz experimentierte nun ein bißchen mit seiner Graph-Darstellung ganzzahliger Funktionen. Insbesondere versuchte er, Graphen mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften

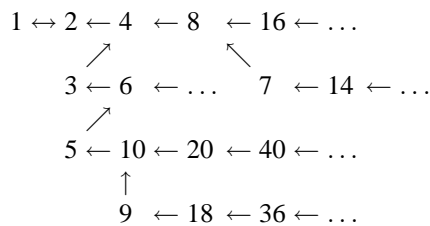
zu konstruieren. Z.B. ist der Graph  $\Gamma_\varphi$ , wobei  $\varphi(n) := n + 1$  die Nachfolgerfunktion ist, eher langweilig; er besteht nämlich nur aus einem einzigen, unendlich langen Weg

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$$

Auf der Suche nach einer Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , deren Graph einen Kreis enthält, benutze er die (einfache) Erkenntnis, daß diese Funktion  $f$  auf einer gewissen Teilmenge  $D_+ \subset \mathbb{N}$  die Relation  $f(n) > n$  und auf einer anderen Teilmenge  $D_- \subset \mathbb{N}$  die entgegengesetzte Relation  $f(n) < n$  erfüllen muß. Was liegt näher, als für  $D_+$  die ungeraden und für  $D_-$  die geraden Zahlen zu wählen? (Man beachte, daß  $1 \in D_-$  nicht möglich ist.) Probieren wir mal:

$$\hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \hat{f}(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für gerade } n, \\ n+1 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Ein Teil des Collatz-Graphen  $\Gamma_{\hat{f}}$  sieht etwa so aus:

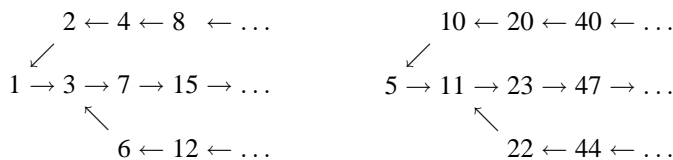


Man verifiziert leicht:

$$\hat{f}(\hat{f}(n)) = \begin{cases} n/4 & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4} \\ (n+1)/2 & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \\ n/2+1 & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} < n \quad \text{für } n > 2.$$

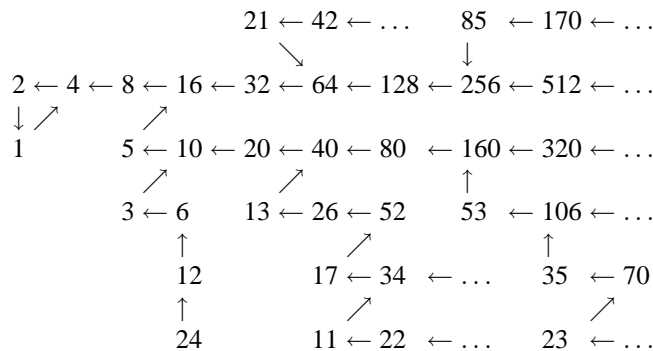
Daher besitzt  $\Gamma_{\hat{f}}$  nur den Zykel (oder Kreis)  $(1, 2)$ , und jede  $\hat{f}$ -Trajektorie endet mit diesem Zykel. Das ist noch ziemlich einfach.

Der nächste Versuch,  $\tilde{f}(n) := n/2$  für gerade  $n$  und  $\tilde{f}(n) := 2n + 1$  für ungerade  $n$ , ergibt den Collatz-Graphen  $\Gamma_{\tilde{f}}$ , von dem ein Teil etwa folgendermaßen aussieht:



In diesem Fall ist klar, daß  $\tilde{f}$  jede ungerade Zahl auf eine größere ungerade Zahl abbildet, weswegen sich kein Zykel ausbilden kann. Der Graph  $\Gamma_{\tilde{f}}$  besteht aus unendlich vielen baumartigen Zusammenhangskomponenten. Jeder Weg in  $\Gamma_{\tilde{f}}$  läßt sich in beide Richtungen unendlich weit fortsetzen.

Der dritte Versuch ist die in (1) definierte Funktion  $f$ . Hier könnte der Collatz-Graph durchaus zusammenhängend sein:



Collatz fand nur den “trivialen Kreis”  $(4, 2, 1)$ , war jedoch nicht in der Lage zu zeigen, daß jede  $f$ -Trajektorie in diesen trivialen Kreis hineinmündet. Er schreibt, er habe seine Ideen deshalb nicht veröffentlicht, weil er nicht beweisen konnte, daß der “triviale Kreis” der einzige sei.

Unabhängig davon entdeckte der englische Mathematiklehrer Bryan Thwaites am Montag, dem 21. Juli 1952 um 4 Uhr nachmittags das  $3n + 1$  Problem [17]; er nennt die  $3n + 1$  Vermutung seitdem *Thwaites' conjecture*, abgekürzt *TC*, und er bot 1000 £ für einen Beweis (siehe [10]).

Collatz erzählte, als er 1952 nach Hamburg kam, seinem Kollegen Helmut Hasse von diesem  $3n + 1$  Problem. Dieser verbreitete es wenig später während eines Gastaufenthalts an der Syracuse University, wo die Iteration der Collatzschen Funktion den Namen *Syracuse-Algorithmus* bekam. Nach besonders aktiven Multiplikatoren wurde das  $3n + 1$  Problem auch noch als Kakutani's Problem oder Ulam's Problem bezeichnet.

Seit Mitte der 70er Jahre wird das  $3n + 1$  Problem zunächst vereinzelt in der mathematischen Fachliteratur behandelt, etwa bei Nievergelt et al. (1974) [12], Terras (1976) [15] oder Crandall (1978) [5]. Ab 1985 setzte, initiiert durch einen Überblicksartikel von J.C. Lagarias in der Zeitschrift *American Mathematical Monthly* [10], eine enorme Steigerung des mathematischen Interesses ein. Bis heute sind mehr als 70 Forschungsaufsätze und eine Forschungsmonographie [19] zum  $3n + 1$  Problem erschienen, sowie viele weitere eher populäre Darstellungen des Problems. Darüber hinaus gibt es Ansätze, das  $3n + 1$  Problem zu didaktischen Zwecken in den Mathematik- oder Informatikunterricht einzubeziehen [7].

## 2 Einführung in die mathematische Behandlung des $3n + 1$ Problems

Viele Autoren betrachten das  $3n + 1$  Problem als “intractable”, und diese Einschätzung könnte durchaus richtig sein. Andererseits ist kein mathematisches Problem so unbehandelbar, daß sich nichts Interessantes dazu sagen ließe. Gerade um das  $3n + 1$  Problem herum gibt es eine Menge interessanter Mathematik, von deren schönsten Ergebnissen ich Ihnen hier etwas präsentieren möchte.

Wie findet man nun etwas Interessantes über ein “nicht behandelbares” Problem heraus? Es empfiehlt sich eine dreifache Strategie:

1. Man übersetze die Vermutung in eine andere mathematische Sprache.
2. Man versuche, eine interessante schwächere Vermutung zu beweisen.
3. Man warte auf geniale Ideen.

Ein einfaches Beispiel für die erste Strategie ist Ihnen sicher schon bei der Definition des Collatz-Graphen aufgefallen. Es gilt nämlich ganz offensichtlich die Äquivalenz:

Die  $3n + 1$  Vermutung ist richtig  $\iff$  der Collatz-Graph  $\Gamma_f$  ist zusammenhängend.

Weniger trivial ist folgendes Resultat:

**Satz 2.1** (Berg und Meinardus 1994 [2]). *Die  $3n + 1$  Vermutung ist zu folgender Aussage äquivalent: Alle in der komplexen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  holomorphen Lösungen  $h$  der Funktionalgleichung*

$$(*) \quad h(z^3) = h(z^6) + \frac{1}{3z} (h(z^2) + \lambda h(\lambda z^2) + \lambda^2 h(\lambda^2 z^2)),$$

wobei  $\lambda := e^{2\pi i/3}$  eine (primitive) dritte Einheitswurzel bezeichnet, haben die Gestalt

$$h(z) = h_0 + \frac{h_1 z}{1 - z}, \quad \text{mit Konstanten } h_0, h_1 \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Sei  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, also in Potenzreihe entwickelbar:

$$(P) \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \quad \text{mit Taylor-Koeffizienten } h_n \in \mathbb{C}.$$

Wir zeigen, daß  $h$  genau dann eine Lösung von  $(*)$  ist, wenn die Taylor-Koeffizienten  $h_n$  ein “erstes Integral” des durch  $f$  erzeugten dynamischen Systems auf  $\mathbb{N}$  bilden; d.h., wenn die Funktion

$$\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto h_n$$

auf jeder  $f$ -Trajektorie konstant ist. Das bedeutet, wir müssen zeigen, daß die Aussage

$$(**) \quad h_n = h_{f(n)} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

äquivalent zur Funktionalgleichung  $(*)$  ist. Daraus folgt dann sofort die Behauptung: Der Collatz-Graph  $\Gamma_f$  ist genau dann zusammenhängend, wenn jede  $f$ -Trajektorie die Eins enthält. In diesem Fall ist obige Funktion  $\tau$  genau dann auf den  $f$ -Trajektorien konstant, wenn  $h_n = h_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Das konstante Glied  $h_0$  der Taylor-Reihe kann unabhängig davon beliebig gewählt werden.

Die Funktionalgleichung (\*) ist äquivalent zum System der beiden Gleichungen

$$(i) \quad h(z) + h(-z) = 2h(z^2),$$

$$(ii) \quad h(z^3) - h(-z^3) = \frac{2}{3z} (h(z^2) + \lambda h(\lambda z^2) + \lambda^2 h(\lambda^2 z^2)).$$

Man erhält (i) aus (\*), indem man in (\*) für  $z$  einmal  $z$  und einmal  $-z$  einsetzt, die beiden Gleichungen addiert und schließlich  $z^3$  durch  $z$  ersetzt. (\*) führt zu (ii), wenn man wiederum einmal  $z$  und einmal  $-z$  einsetzt und anschließend die beiden Gleichungen subtrahiert. Umgekehrt erhält man (\*) aus (i) und (ii), indem man zunächst in (i)  $z^3$  für  $z$  einsetzt, sodann die beiden Gleichungen addiert und schließlich noch durch 2 dividiert.

Setzt man in (i) die Potenzreihe (P) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2h_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2h_n z^{2n},$$

also durch Koeffizientenvergleich die Äquivalenz

$$(i) \quad \iff h_{2n} = h_n \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Einsetzen der Potenzreihenentwicklung in (ii) ergibt für die linke Seite

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z^{3n} - (-z^3)^n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2h_{2k+1} z^{6k+3},$$

und für die rechte Seite

$$(iv) \quad \frac{2}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} h_n (1 + \lambda^{n+1} + \lambda^{2n+2}) z^{2n} = \frac{2}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} 3h_{3k+2} z^{6k+4} = \sum_{k=0}^{\infty} 2h_{3k+2} z^{6k+3};$$

hierbei wurde folgender Sachverhalt ausgenutzt:

$$1 + \lambda^{n+1} + \lambda^{2n+2} = \begin{cases} 3 & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ 0 & \text{falls } n \not\equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

welcher sofort aus den bekannten Relationen  $\lambda^3 = 1$  und  $1 + \lambda + \lambda^2 = 0$  folgt.

Durch Koeffizientenvergleich in (iii) und (iv) erhält man die Äquivalenz

$$(ii) \quad \iff h_{2k+1} = h_{3k+2} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Beachtet man noch  $f(2k+1) = 3(2k+1)+1 = 6k+4 = 2(3k+2)$ , so folgt (\*)  $\Leftrightarrow$  (\*\*), und der Beweis des Satzes ist erbracht.  $\square$

Bei diesem Satz ist es weniger interessant, daß die Funktionen der Gestalt

$$h(z) = h_0 + h_1 \frac{z}{1-z}$$

Lösungen von (\*) sind; das läßt sich leicht nachrechnen. Viel interessanter ist die Frage, ob das *alle* Lösungen sind. Ein Resultat in diese Richtung, das Berg und Meinardus mit funktionentheoretischen Methoden bewiesen, besagt: Jede *ganze* Funktion  $h$ , die eine Lösung von (\*) ist, ist konstant. Der Beweis, daß *alle* Lösungen besagte Gestalt haben, scheint jedoch so schwierig zu sein wie die  $3n+1$  Vermutung selbst.

Bezüglich der zweiten der oben genannten Strategien könnte man sich etwa folgende "intermediäre" Vermutung denken:

**Nur-endlich-viele-Zykel-Vermutung** *Es gibt nur endlich viele  $f$ -Zykel.*

Da jeder Zykel nur aus endlich vielen verschiedenen Zahlen bestehen kann, läßt sich die Nur-endlich-viele-Zykel-Vermutung auch so ausdrücken:

**Nur-endlich-viele-zyklische-Zahlen-Vermutung** *Die Anzahl der zyklischen Zahlen  $z \in \mathbb{N}$  (das sind solche, für die es ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $f^n(z) = z$  gibt) ist endlich.*

Diese "Zwischenvermutung" ist bislang ebenfalls unbewiesen. Dennoch gibt es Teilergebnisse. Im Jahre 1978 konnte R.P. Steiner zeigen, daß es nur einen einzigen Zykel gibt, der gleichzeitig ein *Kreislauf* ist.

Um zu verstehen, was mit einem *Kreislauf* gemeint ist, müssen wir uns die  $f$ -Trajektorien zunächst etwas genauer anschauen, etwa

$$\mathcal{T}_f(27) = (27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, \dots).$$

Jedesmal, wenn wir bei einer ungeraden Zahl angelangt sind, ist der Nachfolger gerade. Das muß so sein:  $3n + 1$  ist stets gerade, wenn  $n$  ungerade ist. Daher liegt es nahe, die Trajektorien zu "verkürzen", ohne etwas Wesentliches zu verlieren, indem man die Collatz-Funktion  $f$  durch folgende Funktion ersetzt:

$$(2) \quad T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad T(n) := \begin{cases} T_0(n) := \frac{n}{2} & \text{für gerade } n, \\ T_1(n) := \frac{3n+1}{2} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Es hat sich in der Forschungsliteratur mittlerweile eingebürgert, diese Funktion die  $3n+1$  Funktion zu nennen und sie mit  $T$  zu bezeichnen. Eine  $T$ -Trajektorie

$$\mathcal{T}_T(s) = (s, T(s), T^2(s), \dots, T^k(s), \dots)$$

entsteht aus der entsprechenden  $f$ -Trajektorie  $\mathcal{T}_f(s)$  mit der gleichen Startzahl  $s \in \mathbb{N}$  dadurch, daß man jeweils die einer ungeraden Zahl nachfolgende Zahl wegläßt.

Ein *Kreislauf* ist nun ein endliches Stück einer  $T$ -Trajektorie der Gestalt

$$x \xrightarrow{T_1} \dots \xrightarrow{T_1} y \xrightarrow{T_0} \dots \xrightarrow{T_0} z,$$

d.h. wir haben einen Anstieg von  $x$  nach  $y$ , etwa in  $k$  Schritten des Typs  $T_1$ , und danach einen Abstieg von  $y$  nach  $z$ , etwa in  $\ell$  Schritten des Typs  $T_0$ . Anders ausgedrückt: die Zahlen  $x, T(x), \dots, T^{k-1}(x)$  sind ungerade, die Zahlen  $y, T(y), \dots, T^{\ell-1}(y)$  sind gerade, und es gelten die Relationen

$$y = T^k(x) = T_1^k(x) \quad \text{und} \quad z = T^\ell(y) = T_0^\ell(y).$$

Die erste dieser Relationen ist gleichbedeutend mit

$$(3) \quad 2^k(y+1) = 3^k(x+1),$$

wie man leicht per Induktion nach  $k$  zeigen kann, und die zweite Relation bedeutet einfach  $2^\ell z = y$ . Offensichtlich ist der bekannte  $T$ -Zykel  $(1, 2)$  ein Kreislauf, mit den Schrittzahlen  $k = \ell = 1$ .

Da  $2^k$  und  $3^k$  klarerweise teilerfremd sind, folgt aus der Beziehung  $2^k(y+1) = 3^k(x+1)$ , daß die Zahl

$$h := \frac{x+1}{2^k} = \frac{y+1}{3^k}$$

jedenfalls eine ganze Zahl sein muß. Zudem läßt sich  $x$  durch  $h$  ausdrücken:  $x = 2^k h - 1$ . Beachtet man noch  $y = 2^\ell z$ , so folgt aus der Zykel-Bedingung  $z = x$  sofort  $y = 2^\ell x$ , und man erhält für  $h$  die Beziehung

$$h = \frac{y+1}{3^k} = \frac{2^\ell x + 1}{3^k} = \frac{2^\ell(2^k h - 1) + 1}{3^k}.$$

Das ergibt eine exponentiell Diophantische Gleichung für die Zahlen  $k$ ,  $\ell$  und  $h$ :

$$(4) \quad (2^{k+\ell} - 3^k) h = 2^\ell - 1.$$

Umgekehrt ergibt jede Lösung  $(k, \ell, h)$  dieser Gleichung mit *natürlichen Zahlen*  $k, \ell, h \in \mathbb{N}$  einen  $T$ -Zykel, der zudem ein Kreislauf ist: man setze einfach  $x := 2^k h - 1$  und  $y := 2^\ell x$ . Dies ergibt dann zusammen mit Gleichung (4):

$$3^k(x+1) = 3^k(2^k h) = 2^k(3^k h) = 2^k(2^{k+\ell} h - 2^\ell + 1) = 2^k(2^\ell x + 1) = 2^k(y+1),$$

und das ist gerade Gleichung (3), welche den Anstieg in  $k$  Schritten  $y = T^k(x) = T_1^k(x)$  bedeutet.

Diese Beobachtung stammt von J.L. Davison (1976) [6]. Ein Jahr später präsentierte dann Steiner auf einer Tagung einen Beweis, daß die Gleichung (4) in den natürlichen Zahlen nur die Lösung  $k = \ell = h = 1$  zuläßt [14]. Steiners Beweis beruht einerseits auf der Kettenbruchentwicklung der reellen Zahl  $\log_2 3$  und andererseits auf tiefliegenden Methoden der analytischen Zahlentheorie, nämlich Alan Bakers Abschätzungen von "Linearformen in Logarithmen".

### 3 Ist eine $3n + 1$ Trajektorie eine Irrfahrt?

Beginnt man damit, ein dynamisches System zu studieren – und die  $3n + 1$  Funktion definiert ein dynamisches System auf den natürlichen Zahlen –, so empfiehlt es sich, zunächst einige Beispiele zu rechnen. Allerdings muß man die empirischen Daten dann sorgfältig interpretieren, denn Beispiele können auch in die Irre führen. In Abbildung 1 sind einige Anfangsstücke von  $T$ -Trajektorien mit zufällig gewählten Startzahlen aufgezeichnet. Betrachtet man diese Graphiken, so könnte man den Eindruck gewinnen, es handele sich um eine Irrfahrt mit einer leichten Drift nach unten (siehe Fig. 1). In der Tat kann man folgendes beweisen:

**Satz 3.1** (Terras 1976 [15]). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest gewählt. Durchläuft dann die Startzahl  $s$  genau einmal alle  $2^n$  Restklassen modulo  $2^n$ , so kommt jede mögliche  $n$ -stellige  $T_0$ - $T_1$ -Folge genau einmal als  $n$ -schrittiges Anfangsstück einer der  $T$ -Trajektorien  $\mathcal{T}_T(s)$  vor.*



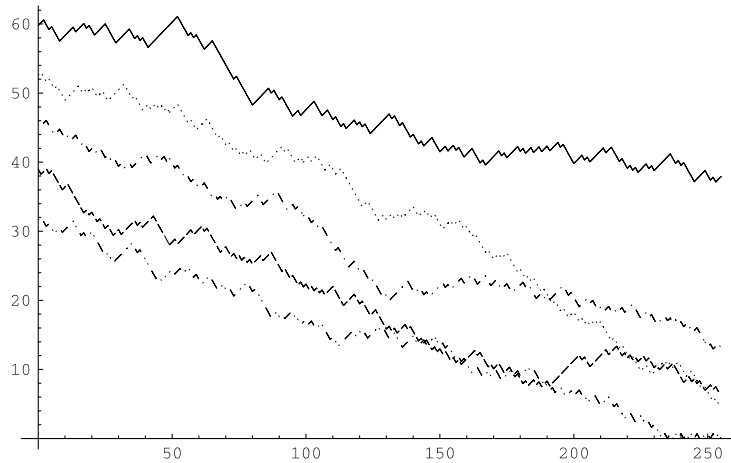


Fig. 1 Die ersten 255 Schritte einiger  $3n + 1$  Trajektorien. Hierbei ist nach rechts die Schrittnummer  $n$  in linearer Skalierung abgetragen, und nach oben die Iterierte  $T^n(s)$  in logarithmischer Skalierung.

Damit lassen sich die ersten  $n$  Schritte von  $T$ -Trajektorien tatsächlich als Irrfahrt auf den natürlichen Zahlen deuten, wobei die Schritte  $T_0$  und  $T_1$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen – für eine feste Schrittzahl  $n \in \mathbb{N}$  wohl gemerkt. Die Drift nach unten läßt sich auch leicht deuten: für große Zahlen  $n$  ist  $T_1(n) \approx \frac{3}{2}n$ , bei gleicher Wahrscheinlichkeit von  $T_1$  und  $T_0(n) = \frac{1}{2}n$  ist also im Durchschnitt pro Schritt mit einem Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,866$$

zu rechnen – jedenfalls bei den ersten  $n$  Schritten.

Diese stochastischen Überlegungen sind allerdings nicht für einen Beweis der  $3n + 1$  Vermutung tauglich. Man muß sich nämlich folgendes vor Augen halten: die Stochastik erstreckt sich nur auf die ersten  $n$  Schritte. In diesem Anfangsstück – und nur dort – kommt jede denkbare  $T_0$ - $T_1$ -Kombination mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor, wenn man zunächst zufällig (d.h. mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit) eine Restklasse modulo  $2^n$  bestimmt und dann aus dieser Restklasse irgendeine Zahl als Startzahl nimmt. Wie man an den Graphiken sieht, ist bei Zahlen der Größenordnung  $e^{30}$  bis  $e^{60}$  nach 200 Schritten jedoch in der Regel noch nicht die Zahl 1 erreicht. Daher bringt die Stochastik hier wenig; die  $3n + 1$  Vermutung bezieht sich eher auf das asymptotische Verhalten der  $T$ -Trajektorien als auf die ersten  $n$  Schritte.

Andererseits konnte Terras, aufbauend auf vorigem Satz, noch eine weitere interessante mathematische Aussage beweisen. Sie bezieht sich auf die Menge der Startzahlen  $s \in \mathbb{N}$ , deren  $T$ -Trajektorie einmal unter den Startwert fällt,

$$F := \{s \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß } T^k(s) < s\}.$$

Die kleinste Schrittnummer  $k$  mit  $T^k(s) < s$  nennt man gelegentlich die *Stoppzeit* (*stopping time*) von  $s$  und bezeichnet sie mit  $\sigma(s)$ . Die Menge  $F$  ist also die Menge der Startzahlen mit *endlicher Stoppzeit*;  $F$  steht für *finite stopping time*. Es gilt nun der bemerkenswerte

**Satz 3.2** (Terras 1976, 1979 [15, 16]). *Die Menge  $F$  hat asymptotische Dichte 1, d.h.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{s \in F : s \leq x\}| = 1.$$

Dieser Satz ist später von anderen Autoren noch mit anderen Methoden bewiesen und verschärft worden. Das bislang stärkste Resultat stammt von I. Korec (1994) [8], der wie Terras mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden arbeitete. Er ersetzte Terras' Menge  $F$  durch

$$M_c := \{s \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß } T^k(s) < s^c\},$$

wobei  $c$  eine reelle Zahl ist, und bewies

**Satz 3.3** (Korec 1994 [8]). *Für jede reelle Zahl  $c > \log_4 3$  hat die Menge  $M_c$  asymptotische Dichte 1, d.h.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{s \in M_c : s \leq x\}| = 1.$$

#### 4 Der Rückwärtsprozeß: Chaos und harte Analysis

Die mathematischen Schwierigkeiten bei der Untersuchung der Dynamik von  $3n + 1$  Iterationen scheinen damit zusammenzuhängen, daß wir es mit einem deterministischen Prozeß zu tun haben, der stochastisches Verhalten simuliert (vgl. [10]). Das verbindet die Sache mit der mathematischen Behandlung des "Chaos". Analysiert man den Rückwärtsprozeß zur Iteration der  $3n + 1$  Funktion – die Frage: wo können  $3n + 1$  Trajektorien herkommen? –, so findet man in der Tat so etwas wie chaotisches Verhalten. Die hierzu nötigen mathematischen Methoden sind jedoch recht kompliziert (siehe [19]), so daß hier nur einige grundsätzliche Ideen dargestellt werden können.

Wir interessieren uns jetzt für die Abbildung  $T^{-1}$ , die jeder natürlichen Zahl  $a \in \mathbb{N}$  die Menge ihrer unmittelbaren  $3n + 1$  Vorgänger zuordnet. Aus der Definition der  $3n + 1$  Funktion in (2) folgt sofort:

$$T^{-1}(a) = \begin{cases} \{2a, \frac{1}{3}(2a - 1)\} & \text{falls } a \equiv 2 \pmod{3}, \\ \{2a\} & \text{falls } a \not\equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Durch Iteration dieser Abbildung entstehen die  $T$ -Vorgängermengen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(a) &:= \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(a) = \{a\} \cup T^{-1}(a) \cup \dots \cup T^{-n}(a) \cup \dots \\ &= \{b \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } T^n(b) = a\} = \{b \in \mathbb{N} : a \in \mathcal{T}_T(b)\}, \end{aligned}$$

sowie deren *Zählfunktionen*:

$$Z_a(x) := |\{n \in \mathcal{P}_T(a) : n \leq x\}|.$$

Im Fall  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \equiv 0 \pmod{3}$  kann man diese Mengen und deren Zählfunktion leicht explizit hinschreiben:

$$\mathcal{P}_T(a) = \{2^n a : n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \text{also} \quad Z_a(x) = \left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \right\rfloor \quad \text{für } x \in \mathbb{N}.$$

Die  $3n + 1$  Vermutung selbst ist äquivalent zur Aussage  $Z_1(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ . Da die  $3n + 1$  Vermutung jedoch möglicherweise unbehandelbar ist, sollten wir uns mit schwächeren Resultaten über die Zählfunktionen zufriedengeben.

Interessant erscheint dabei das asymptotische Verhalten einer solchen Zählfunktion, etwa für den Parameter  $a = 1$ , da diese Asymptotik etwas über die "Größe" der Vorgängermenge  $\mathcal{P}_T(a)$  aussagt. Man könnte z.B. versuchen, "positive asymptotische Vorgängerdichte" für gewisse  $a \in \mathbb{N}$  zu beweisen. Damit ist folgendes gemeint:

**PAD**( $a$ ) *Es gibt eine Konstante  $c > 0$ , so daß  $Z_a(x) \geq c x$  für hinreichend große  $x \in \mathbb{N}$ .*

(Hierbei steht **PAD** für "positive asymptotische Dichte".) Bislang ist **PAD**( $a$ ) noch für kein einziges  $a \in \mathbb{N}$  gezeigt. Bewiesen ist jedoch, für gewisse Exponenten  $c < 1$  und  $a \in \mathbb{N}$  mit  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , die schwächere Aussage:

**Exp<sub>c</sub>**( $a$ ) *Für hinreichend große  $x \in \mathbb{N}$  gilt  $Z_a(x) \geq x^c$ .*

Im Jahre 1978 zeigte R.E. Crandall [5]: "Es gibt ein  $c > 0$ , so daß **Exp<sub>c</sub>**(1) richtig ist". Dann wurde dieser Exponent schrittweise verbessert: über  $c = \frac{1}{4}$  (Sander 1987 [13]),  $c = \frac{3}{7}$  (Krasikov 1989 [9]) und  $c = 0.48$  (Wirsching 1993 [18]), bis zu einem Computer-gestützten Beweis der Aussage:

**Satz 4.1** (Applegate, Lagarias 1995 [1]). *Für  $c = 0.81$  ist **Exp<sub>c</sub>**( $a$ ) für alle  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$  richtig.*

Ein Ziel für weitere Forschungen in dieser Richtung könnte ein Beweis folgender Vermutung sein:

**SPAD**( $a$ ) *Für jede reelle Konstante  $c$  mit  $0 < c < 1$  gilt **Exp<sub>c</sub>**( $a$ ).*

(**SPAD** steht für "sub-positive asymptotische Dichte".)

Mit Methoden der asymptotischen Analysis lassen sich mittlerweile Verbindungen zwischen subtilen Mischungseigenschaften der  $3n + 1$  Funktion  $T$  auf der einen Seite und der Asymptotik von Zählfunktionen von  $3n + 1$  Vorgängermengen auf der anderen Seite beweisen. Um dies genauer auszudrücken, suchen wir zunächst eine Formel, die in folgender Situation die Zahl  $b \in \mathbb{N}$  ausrechnet:

$$(W) \quad b \longrightarrow T(b) \longrightarrow T^2(b) \longrightarrow \dots \longrightarrow a = T^{k+\ell}(b),$$

hierbei seien  $a \in \mathbb{N}$  und der Weg von  $b$  nach  $a$  im Collatz-Graphen  $\Gamma_T$ , der genau  $k$  Schritte des Typs  $T_0$  und  $\ell$  Schritte des Typs  $T_1$  enthält, gegeben. Wir erhalten eine Vorgängerformel

$$b = \frac{2^{k+\ell}}{3^\ell} a - \mathbf{Rest}(\text{Weg von } b \text{ nach } a),$$

wobei der **Rest** von der Struktur der  $T_0$ - $T_1$ -Folge des Weges von  $b$  nach  $a$  abhängt.

Um eine Formel für **Rest**( $\cdot$ ) zu erhalten, numerieren wir zunächst die Kanten im Weg (W) von 0 bis  $k + \ell - 1$  durch. Genauer: für jedes  $j \in \{0, \dots, k + \ell - 1\}$  erhält die Kante

$$T^j(b) \longrightarrow T^{j+1}(b)$$

die Nummer  $j$ . Wir bezeichnen jetzt mit  $\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1}$  die Nummern derjenigen Kanten, die vom Zweig  $T_1$  der  $3n + 1$  Funktion stammen, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, d.h.

$$k + \ell > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{\ell-1} \geq 0.$$

Durch Induktion nach  $\ell$  erhalten wir dann die *Restformel*:

$$\mathbf{Rest}(\text{Weg von } b \text{ nach } a) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{2^{\alpha_j}}{3^{\ell-j}} = \frac{1}{3^\ell} (2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} 3^1 + 2^{\alpha_2} 3^2 + \dots + 2^{\alpha_{\ell-1}} 3^{\ell-1}).$$

Zusammengesetzt ergibt sich die *Vorgängerformel*:

$$(V) \quad b = \frac{1}{3^\ell} (2^{k+\ell} a - 2^{\alpha_0} - 2^{\alpha_1} 3^1 - 2^{\alpha_2} 3^2 - \dots - 2^{\alpha_{\ell-1}} 3^{\ell-1}).$$

Um den Restterm intuitiv besser zu verstehen, betrachten wir noch einmal unsere  $3n + 1$  Funktion  $T$  etwas genauer:

$$T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad T(n) = \begin{cases} T_0(n) = \frac{n}{2} & \text{für gerade } n, \\ T_1(n) = \frac{3n+1}{2} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Der “gerade Zweig”  $T_0$  ist eine *lineare* Funktion von  $n$ , während der “ungerade Zweig”  $T_1$  in Gestalt des “+1” eine gewisse *Nichtlinearität* aufweist. Die obige Restformel berechnet nun gerade die *akkumulierten Nichtlinearitäten* auf dem Weg von  $a$  zurück nach  $b$ .

Diese akkumulierten Nichtlinearitäten verhalten sich ziemlich chaotisch. Folgendes Resultat erinnert ein wenig an Satz 3.1:

**Satz 4.2** (Wirsching 1998 [19]). *Sei  $\ell \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest gewählt. Durchläuft dann die Zahl  $a \in \mathbb{N}$  genau einmal alle  $2 \cdot 3^{\ell-1}$  primen Restklassen (d.h.  $\not\equiv 0 \pmod{3}$ ) modulo  $3^\ell$ , so kommt jedes  $\ell$ -Tupel  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1}) \in \mathbb{N}_0^\ell$  mit  $\alpha_0 > \dots > \alpha_{\ell-1} \geq 0$  genau einmal in einer Vorgängerformel (V) vor.*

Wir bezeichnen als nächstes für ganze Zahlen  $k, \ell$  mit  $k \geq 0$  und  $\ell \geq 1$  folgende Menge von Summen gemischter Potenzen:

$$\mathcal{G}_{k,\ell} := \left\{ \sum_{\nu=0}^{\ell-1} 2^{\alpha_\nu} 3^\nu \mid k + \ell > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{\ell-1} \geq 0 \right\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{S}_{k,\ell}$  sind gerade alle möglichen, mit  $3^\ell$  multiplizierten, Restterme für fixierte  $k, \ell$ . Man kann beweisen (vgl. [19], p. 126), daß verschiedene  $\ell$ -Tupel  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1})$  zu verschiedenen Summen führen. Damit läßt sich die Kardinalität einer solchen Menge  $\mathcal{S}_{k,\ell}$  leicht berechnen:

$$|\mathcal{S}_{k,\ell}| = \binom{k+\ell}{\ell}.$$

*Beweis.* Ein  $\ell$ -Tupel  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1})$  mit  $k+\ell > \alpha_0 > \dots > \alpha_{\ell-1} \geq 0$  ist gerade eine Auswahl von  $\ell$  Zahlen aus der Menge  $\{0, 1, \dots, k+\ell-1\}$ .  $\square$

Nun gibt es tiefliegende Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzverhalten bestimmter inhomogener Markov-Ketten, dem Verhalten der Summen gemischter Potenzen, und Dichteabschätzungen für  $3n+1$  Vorgängermengen. Eine Konsequenz dieser Zusammenhänge ist der *Reduktionssatz*, der die oben beschriebene Vermutung **SPAD**( $a$ ) auf Verteilungseigenschaften der Mengen  $\mathcal{S}_{k,\ell}$  zurückführt.

Ersetzen wir zunächst in  $\mathcal{S}_{k,\ell}$  den Index  $\ell$  durch ein  $j$ , da wir  $\ell$  noch für andere Zwecke brauchen. Ein Element von  $\mathcal{S}_{k,j}$  sieht dann so aus:

$$(S) \quad 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} 3 + 2^{\alpha_2} 3^2 + \dots + 2^{\alpha_{j-1}} 3^{j-1}$$

mit  $k+j > \alpha_0 > \dots > \alpha_{j-1} \geq 0$ . Wir sind an der Verteilung dieser Summen, wenn alle zugelassenen  $j$ -Tupel  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{j-1})$  durchlaufen werden, unter den Restklassen modulo  $3^\ell$  interessiert. Die erste Beobachtung ist, daß keines der Elemente von  $\mathcal{S}_{k,j}$  durch 3 teilbar ist. Das bedeutet, jede Summe aus  $\mathcal{S}_{k,j}$  ist in einer *primen* Restklasse modulo  $3^\ell$  enthalten. Die entscheidende – noch ungelöste – Frage lautet: Wie sind die Summen gemischter Potenzen aus  $\mathcal{S}_{k,j}$  unter den  $2 \cdot 3^{\ell-1}$  primen Restklassen modulo  $3^\ell$  verteilt? Die natürliche Vermutung wäre, daß sich die Summen (S) ziemlich chaotisch verhalten, und daß sie irgendeine vorgegebene prime Restklasse weder bevorzugen noch vermeiden. Dies ist gerade die Essenz der folgenden Vermutung:

**Vermutung über das Verhalten gemischter Potenzsummen** *Es gibt eine (große) Konstante  $K > 0$  derart, daß für alle  $j, \ell \in \mathbb{N}$  die folgende Implikation richtig ist:*

$$|\mathcal{S}_{j,j}| \geq K \cdot 2 \cdot 3^{\ell-1} \implies \mathcal{S}_{j,j} \text{ trifft alle primen Restklassen modulo } 3^\ell.$$

Diese Vermutung erscheint ziemlich vernünftig: Angenommen, die Anzahl der Elemente von  $\mathcal{S}_{j,j}$  ist so groß, daß man in jede einzelne prime Restklasse modulo  $3^\ell$  mindestens  $K = 10^{99}$  davon hineinstecken könnte, dann ist es doch ziemlich plausibel, daß in jeder dieser primen Restklassen wenigstens *eine* der Summen gemischter Potenzen liegt. Andernfalls wäre die Verteilung der Summen nicht so richtig chaotisch, denn sie würden die eine oder andere prime Restklasse sorgfältig vermeiden.

Nun gilt folgender:

**Satz 4.3** (Reduktionssatz [19]). *Ist die Vermutung über das Verhalten von Summen gemischter Potenzen richtig, so gilt **SPAD**( $a$ ) für jedes  $a \in \mathbb{N}$  mit  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ .*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf “harter Analysis”, d.h. auf möglichst genauen asymptotischen Abschätzungen, in diesem Fall insbesondere von Binomialkoeffizienten. Daneben wird noch Integrationstheorie auf der kompakten topologischen Gruppe  $\mathbb{Z}_3^*$  der invertierbaren 3-adischen ganzen Zahlen benutzt.

### Literatur

- [1] Applegate, D., Lagarias, J.C., *Density Bounds for the  $3x + 1$  Problem II. Krasikov Inequalities*, Math. Comp. **65** (1995), 427–438.
- [2] Berg, L., and Meinardus, G., *Functional equations connected with the Collatz problem*, Results in Math. **25** (1994), 1–12.
- [3] Berg, L., and Meinardus, G., *The  $3n + 1$  Collatz Problem and Functional Equations*, Rostock Math. Kolloq. **48** (1995), 11–18.
- [4] Collatz, L., *Über die Motivation des  $(3n + 1)$ -Problems*, J. Qufu Norm. Univ., Nat. Sci. **3** (1986), 9–11. (chinesisch)
- [5] Crandall, R.E., *On the “ $3x+1$ ” Problem*, Math. Comp. **32** (1978), 1281–1292.
- [6] Davison, J.L., *Some Comments on an Iteration Problem*, Proc. 6th Manitoba Conf. Numerical Mathematics (1976), 155–159.
- [7] Glaser, H. und Weigand, H.-G., *Das ULAM-Problem – Computergestützte Entdeckungen*, DdM **2** (1989), 114–134.
- [8] Korec, I., *A density estimate for the  $3x + 1$  problem*, Math. Slovaca **42** (1994), 85–89.
- [9] Krasikov, I., *How many numbers satisfy the  $3x + 1$  conjecture?*, Int. J. Math. Math. Sci. **12** (1989), 791–796.
- [10] Lagarias, J.C., *The  $3x + 1$  Problem and its Generalizations*, Amer. Math. Mon. **92** (1985), 1–23.
- [11] Leavens, G.T., and Vermeulen, M.,  *$3x + 1$  Search Programs*, Comput. Math. Appl. **24** (1992), 79–99.
- [12] Nievergelt, J., Farrar, J.C., and Reingold, E.M., *Computer approaches to mathematical problems*, Prentice Hall, Inc., Englewood cliffs, N. J., 1974.
- [13] Sander, J.W., *On the  $(3N + 1)$ -Conjecture*, Acta Arith. **LV** (1990), 241–248. (Das Resultat wurde bereits 1987 auf einer Konferenz in Ulm präsentiert.)
- [14] Steiner, R.P., *A Theorem on the Syracuse Problem*, Proc. 7th Manitoba Conf. Numerical Mathematics and Computing 1977 Winnipeg (1978), 155–159.
- [15] Terras, R., *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **XXX** (1976), 241–252.
- [16] Terras, R., *On the existence of a density*, Acta Arith. **XXXV** (1979), 101–102.
- [17] Thwaites, B., *My Conjecture*, Bull., Inst. Math. Appl. **21** (1985), 35–41.
- [18] Wirsching, G.J., *An improved estimate concerning  $3n + 1$  predecessor sets*, Acta Arith. **LXIII** (1993), 205–210.
- [19] Wirsching, G.J., *The Dynamical System Generated by the  $3n + 1$  Function*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1681**, Berlin 1998.

Günther J. Wirsching  
 Katholische Universität Eichstätt  
 D-85071 Eichstätt  
 e-mail: guenther.wirsching@ku-eichstaett.de