

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 2001 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1168:** Zwei Spieler A und B werfen eine  $(0, 1)$ -Laplace-Münze. Spieler A gewinnt, wenn 000 auftritt, Spieler B gewinnt, wenn 010 auftritt.

- a) Es wird solange gespielt, bis ein Sieger feststeht. Wie verhalten sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B?

Es wird nun zusätzlich vereinbart, dass das Spiel nur gültig ist, wenn es genau beim  $n$ -ten Wurf ( $n \geq 3$ ) zu Ende ist; andernfalls muss es wiederholt werden.

- b) Wohin strebt das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B für wachsendes  $n$ ?

Fritz Siegerist, Meilen, CH

**Aufgabe 1169:** Es sei  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Beweise die Ungleichung

$$\left(\frac{2 + \cos(x)}{3}\right)^3 < \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.$$

Péter Ivády, Budapest, H

**Aufgabe 1170 (Die einfache dritte Aufgabe):** Es sei  $f$  ein kubisches Polynom mit den Nullstellen  $a$ ,  $b$  und  $c$  ( $a \neq b$ ), und es sei  $m = (a + b)/2$ . Das Newtonverfahren findet mit dem Startwert  $m$  die Lösung  $c$  der Gleichung  $f(x) = 0$  in einem Schritt.

- a) Man finde eine Verallgemeinerung auf Polynome vierten Grades.
- b) Es sei  $g$  eine beliebige (genügend oft differenzierbare) Funktion. Welche Bedingung über  $m$  und  $g$  garantiert, dass das Newtonverfahren mit dem Startwert  $m$  in einem Schritt eine Lösung der Gleichung  $g(x) = 0$  findet?

Hans Rudolf Schneebeili, Wettingen, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2000

**Aufgabe 1156.** An grossen zylindrischen Gasreservoiren sieht man oft Treppen mit konstanter Steigung  $m$  entlang der Aussenwand hochsteigen. Die Linie, auf der die Stufen zu montieren sind, ist eine gewöhnliche Schraubenlinie. Wie sehen die entsprechenden „Linien konstanter Steigung  $m$ “ an kugelförmigen Reservoiren aus, und wie lang sind sie?

Peter Gallin, Bauma, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hans Walser (Frauenfeld, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Nicht alle Löser interpretieren den Begriff „Linien konstanter Steigung“ auf dieselbe Weise: Einige deuten ihn so, dass der Winkel zwischen der Kurve und den Meridianen konstant sein soll und werden dadurch zu Loxodromen geführt; andere betrachten die Steigung relativ zur Polarachse – was eher zu angenehmem Treppensteigen am kugelförmigen Gasbehälter verhilft – und finden dann Böschungslinien.

Wir folgen den Überlegungen von *Roland Wyss*, dem es auch gelingt, die gesuchten Kurven zu deuten: Auf die Einheitskugel beschränkt hat man für die Raumkurve in Kugelkoordinaten mit der Bogenlänge  $s$  als Parameter die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(s)) \cdot \cos(\vartheta(s)) \\ \sin(\varphi(s)) \cdot \cos(\vartheta(s)) \\ \sin(\vartheta(s)) \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit dem Tangentialvektor

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi'(s) \cdot \sin(\varphi(s)) \cdot \cos(\vartheta(s)) - \vartheta'(s) \cdot \cos(\varphi(s)) \cdot \sin(\vartheta(s)) \\ \varphi'(s) \cdot \cos(\varphi(s)) \cdot \cos(\vartheta(s)) - \vartheta'(s) \cdot \sin(\varphi(s)) \cdot \sin(\vartheta(s)) \\ \vartheta'(s) \cdot \cos(\vartheta(s)) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Die Tatsache, dass der Parameter  $s$  die Bogenlänge ist, wird durch

$$(\vartheta'(s))^2 + (\varphi'(s))^2 \cdot \cos^2(\vartheta(s)) = 1 \quad (3)$$

ausgedrückt, während die Bedingung, dass die Tangente mit der  $(x, y)$ -Ebene den festen Winkel  $\alpha$  einschliesst, zu

$$\cos^2(\alpha) = (\varphi'(s))^2 \cdot \cos^2(\vartheta(s)) + (\vartheta'(s))^2 \cdot \sin^2(\vartheta(s)) \quad (4)$$

führt. Aus (3) und (4) erhält man

$$\vartheta'(s) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\vartheta(s))} \quad (5)$$

$$\varphi'(s) = \frac{\sqrt{\cos^2(\alpha) - s^2 \cdot \sin^2(\alpha)}}{1 - s^2 \cdot \sin^2(\alpha)}. \quad (6)$$

Aus (6) ist ersichtlich, dass der maximale Wert für  $s$  bei  $s = \cot(\alpha) = 1/m$  liegt; die weitere Rechnung belegt, dass die gesuchten (auf der oberen Halbkugel liegenden) Kurven tatsächlich für  $0 \leq s \leq \cot(\alpha)$  definiert sind, und  $2/m$  ist deshalb die Länge der gesamten Kurve (unter Berücksichtigung der unteren Halbkugel). Dass eine obere Grenze existiert, ist plausibel: in der Nähe der Pole ist die Kugel zu flach für unsere Treppe mit konstanter Steigung  $m$ . Die Treppe endet auf der Höhe  $z = \cos(\alpha)$ , es bleibt also oben und unten je eine treppenlose Höhendifferenz von  $1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2(\alpha/2)$  zu überwinden, welche noch mit dem Kugelradius zu multiplizieren ist.

Für die folgende Rechnung ist es günstig, den Winkel  $\beta = \pi/2 - \alpha$ , den die Tangenten mit der  $z$ -Achse bilden, einzuführen. Nimmt man an, dass die Kurve für  $s = 0$  durch den Punkt  $(1, 0, 0)$  geht, so erhält man aus der Differentialgleichung (5)

$$\sin(\vartheta(s)) = s \cdot \cos(\beta), \quad (7)$$

und (6) liefert

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{\sin^2(\beta) - \sigma^2 \cdot \cos^2(\beta)}}{1 - \sigma^2 \cdot \cos^2(\beta)} d\sigma. \quad (8)$$

Das Integral lässt sich mit der Substitution  $\sigma = \tan(\beta) \cdot \sin(\tau)$  auswerten, und man erhält

$$\varphi(\bar{s}) = \frac{\bar{s}}{\cos(\beta)} - \arctan(\cos(\beta) \cdot \tan(\bar{s})), \quad (9)$$

wobei der jetzt von 0 bis  $\pi/2$  variierende neue Parameter  $\bar{s}$  nicht mehr der natürliche Kurvenparameter ist. Setzt man (9) und den auf den neuen Parameter  $\bar{s}$  umgerechneten Ausdruck (7) in (1) ein, so ergibt sich nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} x(\bar{s}) &= \cos(\bar{s}) \cdot \cos\left(\frac{\bar{s}}{\cos(\beta)}\right) + \cos(\beta) \cdot \sin(\bar{s}) \cdot \sin\left(\frac{\bar{s}}{\cos(\beta)}\right) \\ y(\bar{s}) &= \cos(\bar{s}) \cdot \sin\left(\frac{\bar{s}}{\cos(\beta)}\right) - \cos(\beta) \cdot \sin(\bar{s}) \cdot \cos\left(\frac{\bar{s}}{\cos(\beta)}\right) \\ z(\bar{s}) &= \sin(\beta) \cdot \sin(\bar{s}). \end{aligned} \quad (10)$$

Mit einem weiteren Parameterwechsel, nämlich  $t = \frac{2 \cdot \sin^2(\beta/2)}{\cos(\beta)} \cdot \bar{s}$  erhält man nach subtiler Umformung die interpretierbare Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos^2(\beta/2) \cdot \cos(t) + \sin^2(\beta/2) \cdot \cos(t \cdot \cot^2(\beta/2)) \\ y(t) &= \cos^2(\beta/2) \cdot \sin(t) + \sin^2(\beta/2) \cdot \sin(t \cdot \cot^2(\beta/2)) \\ z(t) &= \sin(\beta) \cdot \sin\left(\frac{t \cdot \cos(\beta)}{2 \sin^2(\beta/2)}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

wobei der Parameter  $t$  von 0 bis  $\pi \cdot \sin^2(\beta/2) / \cos(\beta)$  variiert. Die ersten beiden Gleichungen von (11) entpuppen die Projektion der Raumkurve auf die  $(x, y)$ -Ebene als Teil einer Epizykloide, erzeugt durch Abrollen eines (fiktiven) Kreises mit Radius  $\sin^2(\beta/2)$  auf einem festen Kreis mit Radius  $\cos(\beta)$ .

**Aufgabe 1157.** Gegeben die Ellipse mit der Gleichung  $25x^2 + 9y^2 = 900$  und auf ihrer kleinen Achse die Punkte  $O = (0, 0)$  und  $C = (1, 0)$ . Für welche Punkte  $P$  der Peripherie ist der Winkel  $OPC$  maximal?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 21 Zuschriften eingetroffen, von denen einige mehrere Lösungswege aufzeigten: Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien-Herzegowina), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), Christian A. Meyer (Bern, CH), Ignace Morand (Lausanne, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Christoph Soland (Lausanne, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Die meisten Einsender lösen die Aufgabe mit Methoden der Differentialrechnung; weil drei lokale Extrema existieren, erweist sich eine saubere Argumentation als sehr rechenintensiv. Einige bestimmen den kleinsten Kreis durch die Punkte  $O$  und  $C$ , der die Ellipse berührt, wobei die Berührung von Kreis und Ellipse meist durch Nullsetzen der Diskriminante, was wiederum mühsame Rechnungen erfordert, erreicht wird. *Walter Burgherr* findet einen eleganteren Weg zur Bestimmung des gesuchten Berührungspunktes:

Gemäss dem Peripheriewinkelsatz wird der grösste Winkel als Peripheriewinkel des kleinsten Kreises durch  $O$  und  $C$ , der die Ellipse in einem Punkt  $P(u, v)$  berührt, gemessen. Die Kreistangente  $t$  in  $P$  fällt mit der Ellipsentangente  $t : 25ux + 9vy = 900$  zusammen, welche die  $x$ -Achse im Punkt  $T(\frac{36}{u}, 0)$  schneidet. Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt nun

$$\overline{TP}^2 = \overline{TO} \cdot \overline{TC},$$

$$\left(u - \frac{36}{u}\right)^2 + v^2 = \frac{36}{u} \cdot \left(\frac{36}{u} - 1\right).$$

Zusammen mit der Ellipsengleichung  $25u^2 + 9v^2 = 900$  ergibt sich für  $u$  die Bestimmungsgleichung  $4u^3 - 63u - 81 = 0$  mit den drei Lösungen  $u_1 = -3$ ,  $u_2 = -\frac{3}{2}$  und  $u_3 = \frac{9}{2}$ . Jede führt zu zwei bezüglich der  $x$ -Achse symmetrisch liegenden Punkten

$$P_1 = (-3, \pm 5\sqrt{3}), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}\sqrt{15}\right), \quad P_3 = \left(\frac{9}{2}, \pm \frac{5}{2}\sqrt{7}\right).$$

Für die drei Winkel  $\varphi_i = \angle OP_iC$  erhält man näherungsweise  $\varphi_1 \approx 5.68^\circ$ ,  $\varphi_2 \approx 5.67^\circ$  und  $\varphi_3 \approx 6.34^\circ$  oder mit etwas mehr Aufwand die exakten Werte

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{33586176}}{5824}\right), \quad \varphi_2 = \arccos\left(\frac{\sqrt{33587736}}{5824}\right), \quad \varphi_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{33504926}}{5824}\right),$$

was das Punktepaar  $P_3$  als das gesuchte ausweist.

**Aufgabe 1158 (Die einfache dritte Aufgabe).** Einem Kreissegment wird eine Folge von Kreisen  $k_0, k_1, k_2, \dots$  so einbeschrieben, dass  $k_1$  den Kreis  $k_0$  berührt,  $k_2$  wiederum  $k_1$  berührt, usw. Zeige, dass die Tangenten in den Berührungspunkten von Nachbarkreisen alle durch einen festen Punkt gehen.

Fritz Siegerist, Meilen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 10 Zuschriften eingegangen: Gheorge Bercea (München, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Etwa die Hälfte der eingegangenen Lösungen – einige Einsender behandeln die Aufgabe mit verschiedenen Methoden und geben sogar Verallgemeinerungen an – basieren auf Methoden der analytischen Geometrie. Viele Lösungen verwenden Kreisinverson, wobei das Inversionszentrum unterschiedlich gewählt wird. Wir übernehmen die Argumentation von *Johannes M. Ebersold* und *Bernhard Ruh*:

Es sei  $k$  der gegebene Kreis, und  $g$  sei die Gerade, welche das Segment begrenzt. Sie schneide  $k$  in  $A$  und  $B$ . Wir unterwerfen nun die ganze Situation der Inversion am Kreis mit Zentrum  $A$ , der durch  $B$  geht:

1. Das Bild von  $k$  ist eine durch  $B$  laufende Gerade  $k'$ .
2. Die Gerade  $g$  wird auf sich selber abgebildet, d.h. es ist  $g = g'$ .
3. Die Kreise  $k_0, k_1, \dots$  werden zu sich berührenden Kreisen  $k'_0, k'_1, \dots$ , welche die Geraden  $g'$  und  $k'$  berühren; ihre Mittelpunkte und gegenseitigen Berührungspunkte liegen also auf der einen Winkelhalbierenden  $w'$  von  $g'$  und  $k'$ .
4. Die gemeinsame Tangente  $t_i$  von  $k_i$  und  $k_{i+1}$  wird zu einem Kreis durch  $A$ , der  $w'$  senkrecht schneidet und deshalb auch durch den Punkt  $P'$  geht, der bezüglich  $w'$  symmetrisch zu  $A$  liegt (und der deshalb auf  $k'$  liegt). Das Urbild  $P$  von  $P'$  liegt also einerseits auf allen Tangenten  $t_i$ , andererseits auf  $k$ .
5. Mit obigen Überlegungen ist die Existenz eines gemeinsamen Tangentenschnittpunktes  $P$  bewiesen. Seine Lage lässt sich aber genauer beschreiben: Weil  $P'$  und  $A$  bezüglich  $w'$  symmetrisch liegen, liegen deren Urbilder  $P$  und  $\infty$  symmetrisch bezüglich des Urbildkreises  $w$ , d.h.  $P$  ist das Zentrum dieses Kreises. Der Urbildkreis  $w$  ist aber der Kreis, auf welchem sämtliche Berührungspunkte der Kreise  $k_0, k_1, \dots$  liegen, und dieser Kreis liegt symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Sehne  $AB$ , hat also sein Zentrum  $P$  auf dieser Mittelsenkrechten. Andererseits liegt  $P$  auf  $k$ . Es muss sich also um den (dem Segment abgewandten) Schnittpunkt der Symmetrieachse des Segmentes mit dem Kreis  $k$  handeln.

Man beachte, dass die obige Argumentation weitgehend übernommen werden kann, wenn die Sehne  $AB$  durch einen Kreisbogen durch  $A$  und  $B$  ersetzt wird. Das Bild von  $g$  ist dann eine von  $g$  verschiedene Gerade  $g'$ , und  $P'$  liegt nicht mehr auf  $k'$  (also  $P$  nicht mehr auf  $k$ ); aber die Aussage, dass alle gemeinsamen Tangenten durch das Zentrum des Kreises laufen, auf welchem die Berührungspunkte liegen, bleibt richtig.