
Die Vermutung von Poincaré

Jochen Brüning

1 Einführung

Vor 110 Jahren publizierte Henri Poincaré seine berühmte Abhandlung über *Analysis Situs* [3, S. 193–288]. Damit kodifizierte er einen neuen Zweig der Mathematik, den zum erstenmal Bernhard Riemann in seinem nicht weniger berühmten Habilitationsvortrag *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [4, S. 272–287] in seiner Bedeutung erkannt und in Umrissen zu skizzieren versucht hatte. Doch Riemanns Einsichten und Visionen waren seiner Zeit voraus; es bedurfte einer Entwicklung von mehr als 50 Jahren, bis sie zu gesicherten Bestandteilen der mathematischen Theorie und zum Stützpfiler neuer physikalischer Theorien wurden.

Poincaré beginnt mit der für uns vielleicht überraschenden Feststellung, dass die Geometrie des m -dimensionalen Raumes ein „realistisches“ Objekt hat, also nicht nur logisch konsistent ist, sondern auch wichtig für das Verständnis der „wirklichen Welt“ des dreidimensionalen Anschauungsraumes. Erst als die Euklidischen Räume beliebiger Dimension „Bürgerrecht“ im Reich der Analysis erhalten hatten, wurde der Blick dafür geschärft, dass viele wichtige mathematische Objekte nur lokal so beschaffen sind wie ein Euklidischer Raum, global aber von völlig anderer Natur sind: die *m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, die Riemann zuerst beschrieben hatte, ohne schon zu einer strikten Definition im Stande gewesen zu sein.

Riemann insistierte jedoch auf der – seit Euklid niemals bestrittenen – konstitutiven Bedeutung des Messens für die Geometrie, weshalb die nach ihm benannten *Riemannschen Mannigfaltigkeiten* auch Mannigfaltigkeiten mit einer Massbestimmung (d.h. einer Längenmessung) sind. Darüber ging Poincaré entscheidend hinaus; die grundlegende Einsicht erläutert er in seinem zitierten Meisterwerk an einem damals geläufigen Bonmot: „Geometrie ist die Kunst, anhand von schlechten Skizzen gute Gedanken zu entwickeln“. Wenn man diese Bemerkung ernst nimmt, so argumentiert er, so muss auch eine schlechte Skizze etwas Wesentliches wiedergeben, etwas, das zwangsläufig von der Massbestimmung des betrachteten Objektes unabhängig ist. Er beschreibt dieses „Etwas“ in recht vager Formulierung als die „relative Situation der Punkte, Linien und Flächen“, aber er findet sehr präzise *globale* Invarianten dieser relativen Situation; das ist das Hauptergebnis der *Analysis Situs*, das durch eindrucksvolle Anwendungen unterstrichen wird. Die Arbeiten von Sophus Lie und Felix Klein hatten die Bedeutung des Gruppenbegriffes für die Geometrie herausgearbeitet, und deshalb wählt auch Poincaré Gruppen

als Invarianten von (topologischen) Mannigfaltigkeiten: Die Homologiegruppen und die Fundamentalgruppe; die *Analysis Situs* begründete, in unserer heutigen Terminologie, die Algebraische Topologie.

Wenn es also Mannigfaltigkeiten gibt, die global wesentlich verschieden vom m -dimensionalen Euklidischen Raum sind, so fragt man nach irgendeiner Art von Ordnung, von Klassifikation dieser Objekte, und in diesen Umkreis gehört die Poincarésche Vermutung, die zu einem der attraktivsten Probleme der modernen Mathematik geworden ist.

2 Die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten der Dimensionen eins und zwei

Wir betrachten nun ein Objekt der eingangs besprochenen Art, eine Mannigfaltigkeit M der Dimension eins oder zwei, die wir uns der Einfachheit halber als eine Teilmenge des Anschauungsraumes \mathbb{R}^3 denken. Lokal sei M gegeben durch unabhängige Gleichungen, z.B. als Nullstellenmenge einer differenzierbaren oder analytischen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^l$, mit $l = 1$ oder $l = 2$; dies ist die Beschreibungsweise der analytischen Geometrie seit Descartes. Die geforderte Unabhängigkeit drückt sich so aus, dass die Gleichung $F = 0$ auflösbar wird zu einer Parametrisierung $\psi : \mathbb{R}^{3-l} \rightarrow F^{-1}(0)$; hier ist ψ eine injektive und eigentliche Immersion, und eine Mannigfaltigkeit wird dadurch definiert, dass jeder ihrer Punkte eine derart parametrisierbare Umgebung besitzt, dass sie lokal „aussieht“ wie der Euklidische Raum derselben Dimension. Wir wollen ausserdem verlangen, dass M zusammenhängend ist, dass also je zwei Punkte durch eine stetige Kurve in M verbunden werden können, und weiter, dass M orientierbar ist; diese Forderungen sind von globaler Natur.

Im eindimensionalen Fall ($l = 2$) ist ψ im Wesentlichen eine differenzierbare Parametrisierung einer Kurve im \mathbb{R}^3 mit nirgends verschwindendem Tangentialvektor. Die globale Beschreibung von M wird dann erleichtert durch die Vorstellung, dass ein Massenpunkt sich mit endlicher, aber stets positiver Geschwindigkeit im Raum bewegt auf der Bahn M . Dann gibt es offenbar nur zwei Möglichkeiten: er kehrt zu einem (beliebig gewählten) Ausgangspunkt im Laufe der Zeit zurück oder er tut es nicht. Damit kann es nur zwei „Typen“ von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten geben, nämlich \mathbb{R} und $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$. Diese Aussage lässt sich weiter präzisieren, wenn wir einen Punkt x_0 auf M fixieren und von x_0 aus die Bogenlänge s von M als Parameter einführen, die sich in einer Parametrisierung ψ mit $\psi(0) = x_0$ ausdrückt durch

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \psi(t) \right| dt.$$

Unter Einbeziehung der Metrik gibt es also noch mehr mögliche Typen, nämlich zusätzlich alle offenen Intervalle mit Randpunkten, die sich differenzierbar nicht von \mathbb{R} unterscheiden; ausserdem ist die Länge eine Invariante der Parametrisierung. Zwei Kreise sind also genau dann isometrisch, d.h. durch einen längenerhaltenden Homöomorphismus aufeinander abbildbar, wenn sie dieselbe Länge haben.

Wenn wir aber nur \mathbb{R} und S^1 unterscheiden wollen, können wir das Kriterium der Kompaktheit benutzen, das keine Längenbestimmung verlangt; dadurch werden die eindimen-

sionalen Mannigfaltigkeiten topologisch und differenzierbar klassifiziert: sie sind stets homöomorph oder diffeomorph zu einem der beiden Typen.

Komplizierter wird die Lage, wenn wir uns mit Flächen im \mathbb{R}^3 beschäftigen. Wir sehen sofort, dass es, analog zum eindimensionalen Fall, die Flächen \mathbb{R}^2 und S^2 gibt, die (x, y) -Ebene und die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , die sich wieder durch das Kompaktheitskriterium unterscheiden lassen. Allerdings verschwindet dieser Unterschied, wenn wir aus der Einheitskugel einen einzigen Punkt herausnehmen, z.B. den „Nordpol“, und die restliche Fläche stereographisch auf die (x, y) -Ebene projizieren; diese schon in der Antike bekannte und für Astronomie und Navigation unentbehrliche Abbildung erhält zwar offenbar nicht die Abstände, wohl aber die Winkel.

Eine weitere Fläche lässt sich konstruieren, indem wir einen Kreis γ_1 in der (x, z) -Ebene, der die z -Achse nicht trifft, um die z -Achse rotieren lassen; wir erhalten so den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$. Da T^2 kompakt ist, stellt sich nur die Frage der Unterscheidung von S^2 . Anschaulich sind beide Flächen grundverschieden, die Begründung der Verschiedenheit braucht aber ein mathematisches Argument. Betrachten wir deshalb auf T^2 den Kreis γ_1 , dessen Rotation den Torus erzeugt: Wenn wir ihn herausnehmen, bleibt der Torus zusammenhängend, je zwei Punkte können durch eine stetige Kurve verbunden werden; wir sagen dann, dass γ_1 „nicht berandet“. Wenn wir aber eine geschlossene Kurve – oder einen „Zyklus“, wie man auch sagt – aus der Sphäre herausnehmen, so zerfällt das Komplement in zwei Komponenten; dies ist, nach stereographischer Projektion von einem Punkt ausserhalb des Zyklus, die Aussage des bekannten Jordanschen Kurvensatzes. Daraus schliessen wir dann, dass T^2 und S^2 nicht homöomorph sein können.

Genau genommen besitzt T^2 viele verschiedene Zyklen mit dieser Eigenschaft. Ein zweiter, nennen wir ihn γ_2 , kann als Bahn eines festen Punktes von γ_1 während der Rotation gewählt werden; alle anderen Zyklen sind dann in bestimmter Weise von γ_1 und γ_2 erzeugt.

Den aufgeschnittenen Torus können wir auch als einen „Henkel“ ansehen, der sich an eine gegebene Fläche ankleben lässt. Auf diese Weise entsteht, mindestens im Sinne der von Poincaré angesprochenen relativen Situation der Punkte zueinander, also im topologischen Sinne, der Torus aus der Sphäre durch Ankleben eines Henkels, und durch fortwährendes weiteres Ankleben solcher Henkel können wir eine unendliche Folge von kompakten Flächen erzeugen. Sie sind schon deswegen – zumindest intuitiv – alle voneinander verschieden, weil jeder neue Henkel zwei neue Zyklen erzeugt, die nicht beranden. Wenn wir die Anzahl der Henkel traditionsgemäss mit g bezeichnen und das „Geschlecht“ der Fläche nennen, so sollte jede Fläche vom Geschlecht g gerade $2g$ verschiedene Zyklen haben, die nicht beranden. Poincaré hat diese Verschiedenheit präzise gefasst im Begriff der Homologiegruppe $H^1(M)$ der Fläche M : sie entsteht als Quotient der freien abelschen Gruppe aller Zyklen durch die Untergruppe der berandenden Zyklen; ist M^g eine derartige Fläche mit g Henkeln, so ist gerade $H^1(M^g) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Als nächstes wird man fragen, ob es noch andere, nicht zu einem M^g homöomorphe kompakte Flächen geben kann. Das bemerkenswerte Hauptergebnis besagt nun: Solange wir uns auf zusammenhängende und orientierbare Flächen beschränken, ist das nicht der Fall. In unserer modernisierten Form von Poincarés Sprache erhalten wir damit den folgenden schönen Satz:

Theorem 1 *Zwei kompakte orientierbare Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie isomorphe Homologiegruppen haben, also genau dann, wenn sie dasselbe Geschlecht haben.*

Wir können, in Anlehnung an den eindimensionalen Fall, auch nach einer isometrischen Klassifizierung fragen. Da es nun sehr viele gleichwertige Möglichkeiten der Längenbestimmung gibt, kann es allerdings keine so einfachen Antworten mehr geben; wir können nur hoffen, spezielle Metriken zu finden, die charakterisierend sind für Flächen vom Geschlecht g ; dies sind die Metriken von *konstanter Gaußkrümmung*, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Als Spezialfall ergibt sich jedoch der folgende interessante Satz:

Theorem 2 *Die einzige kompakte orientierbare Fläche, die eine Metrik mit konstanter positiver Gaußkrümmung besitzt, ist S^2 .*

3 Die Klassifikation beliebiger Mannigfaltigkeiten und Poincarés Vermutung

Im Hinblick auf die eingangs zitierten Bemerkungen und die erfolgreiche Behandlung des Flächenfalles war es natürlich, dass Poincaré sich dem Klassifikationsproblem für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension m zuwandte. Das Konzept der Homologiegruppe von Flächen liess sich problemlos, wenn auch weniger anschaulich, auf höhere Dimensionen verallgemeinern; nun traten zur oben eingeführten Gruppe $H^1(M)$ weitere Gruppen $H^q(M)$ hinzu für jedes $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q \leq m$, die zur *Homologie von M* , $H(M) := \bigoplus_0^m H^q(M)$, vereinigt werden. Poincaré war überzeugt davon, analoge Resultate erzielen zu können und stellte 1900 [3, S. 370] die folgende Behauptung auf: *Jede kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit $H(M) = H(S^m)$ ist homöomorph zu S^m .*

Diese Aussage erwies sich als falsch; Poincaré konnte selbst ein sehr schönes Gegenbeispiel in drei Dimensionen angeben, nämlich die Mannigfaltigkeit $M^3 := SO(3)/I_{60}$, den Quotientenraum der orientierungserhaltenden Drehungen im \mathbb{R}^3 nach der *Ikosaedergruppe*, denjenigen Elementen von $SO(3)$, die das regelmässige Ikosaeder in sich selbst überführen. Damit war klar, dass es weiterer Invarianten zur Klassifikation bedurfte; es wurde auch klar, wieviel schwieriger die Analyse von Dreimannigfaltigkeiten ist, wieviel leichter unsere Intuition irreführt wird als im Flächenfall: Die Kette falscher Beweise und falscher Behauptungen in diesem Feld ist seitdem nicht abgerissen!

Wodurch unterscheidet sich nun das Gegenbeispiel von der 3-Sphäre? Die richtige Antwort erwächst wieder aus dem Studium von Zyklen, wenn wir nämlich nicht danach fragen, ob sie beranden, sondern ob sie auf einen ihrer Punkte *stetig in M zusammenziehbar* sind. Wenn wir einen Punkt $x_0 \in M$ festhalten und Zyklen durch x_0 als äquivalent ansehen, wenn sie stetig so ineinander überführt werden können, dass x_0 fest bleibt, wenn wir weiter solche Zyklen durch x_0 verknüpfen durch sukzessives Durchlaufen, so erhalten wir wieder eine Gruppe, die auch von Poincaré entdeckt und die *Fundamentalgruppe von M mit Basispunkt x_0* genannt wurde, in Zeichen $\pi_1(M, x_0)$. Im Beispiel oben ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M^3, x_0)$ endlich von der Ordnung 120 (die Wahl des Basispunktes ist irrelevant für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten), für S^3

ist sie aber offensichtlich trivial; da die Konstruktion invariant unter Homöomorphismen ist, können S^3 und M^3 nicht homöomorph sein.

Es zeigte sich schnell, dass die Fundamentalgruppe ein komplizierteres Objekt als die Homologiegruppe ist, z.B. ist sie schon für Flächen vom höheren Geschlecht sehr gross und nicht kommutativ; tatsächlich gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\pi_1(M, x_0) \rightarrow H^1(M)$, wie Hurewicz später zeigte.

Deshalb modifizierte Poincaré im Jahre 1904 [3, S. 498] seine falsche Klassifikationsidee zu der folgenden Aussage, die heute unter dem Namen *Poincaré-Vermutung* bekannt und noch immer, trotz zahlloser Versuche, nicht bewiesen ist.

Vermutung 3 *Eine kompakte orientierbare Dreimannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe ist homöomorph zu S^3 .*

Ein Problem von ausserordentlicher Schwierigkeit kann häufig besser verstanden und schliesslich vielleicht auch gelöst werden, wenn man seine Parameter verändert, um zu analogen, aber womöglich besser zugänglichen Fragestellungen zu gelangen. Im Fall der Poincaré-Vermutung ist der offensichtliche Parameter die Dimension. Eine zusätzliche Komplikation erwächst dann daraus, dass wir in Dimensionen grösser als drei unterscheiden müssen zwischen topologischen, stückweise linearen und differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, je nachdem, welche Eigenschaften wir von den *Übergangsfunktionen* $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ verlangen, wenn ψ_1, ψ_2 injektive eigentliche Immersionen sind, die die Mannigfaltigkeit definieren. Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass die Fundamentalgruppe allein in höheren Dimensionen nicht mehr genug Informationen bietet, ähnlich wie wir es bei der Homologiegruppe schon in drei Dimensionen gesehen haben. Man ersetzt deshalb das Klassifikationsmerkmal „Isomorphie der Fundamentalgruppen“ $\pi_1(M_j, x_0)$, $j = 1, 2$, durch die Existenz von Abbildungen $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_1$ mit der Eigenschaft, dass fg und gf (topologisch oder differenzierbar) homotopieäquivalent zur Identität sind.

Die ersten Jahrzehnte der Nachkriegszeit brachten grosse Erfolge im Verständnis der Struktur höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten mit sich. So erzielte Stephen Smale 1960 den ersten Durchbruch im Umfeld der Poincaré-Vermutung mit dem folgenden Satz, der auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress 1966 mit einer Fields-Medaille ausgezeichnet wurde [5].

Theorem 4 *Eine kompakte und orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 5$ ist homöomorph zu S^m , wenn sie nur differenzierbar homotopieäquivalent zu S^m ist.*

Dasselbe Ergebnis wurde, für $m \geq 6$, etwa gleichzeitig, auch von Andrew Wallace erzielt, auch mit verwandten Methoden; ein entsprechendes Resultat im stückweise linearen Fall bewies John Stallings ebenfalls 1960; seine Einschränkung auf Dimensionen grösser oder gleich 7 wurde von Zeeman 1961 beseitigt.

Viel schwieriger stellte sich der Fall $m = 4$ dar, den erst Simon Donaldson und Michael Freedman zwanzig Jahre später weitgehend aufklären konnten; beide errangen ebenfalls

eine Fields-Medaille. Der differenzierbare Fall erweist sich – ausgerechnet in der Dimension vier! – als ausserordentlich schwierig, aber der folgende Satz von Freedman erledigt den topologischen Fall vollständig [1].

Theorem 5 *Eine kompakte und orientierbare topologische Mannigfaltigkeit der Dimension vier ist homöomorph zu S^4 , wenn sie nur homotopieäquivalent zu S^4 ist.*

Abschliessend wollen wir noch einmal zur metrischen Situation zurückkehren und die Poincaré-Vermutung in diesem Licht betrachten, d.h. wir fragen nach speziellen Metriken auf der Dreisphäre und ihren topologischen „Verwandten“. William Thurston, auch er ein Träger der Fields-Medaille, hat ein geometrisches Programm entworfen, das acht typische Geometrien mit ausgezeichneter und recht einfacher metrischer Struktur auf Dreimannigfaltigkeiten beschreibt, und er vermutet, dass sich jede beliebige kompakte Dreimannigfaltigkeit in kanonischer Weise in diese Geometrien zerlegen lässt [6]. Während sieben dieser Geometrien inzwischen gut bis sehr gut verstanden sind, bleibt die achte bislang noch weitgehend rätselhaft. Das sollte uns nun nicht mehr wundern, denn Thurstons zugehörige Vermutung erweist sich als eine metrische Verallgemeinerung der Poincaré-Vermutung. Sie lautet:

Theorem 6 *Jede kompakte und orientierbare Dreimannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe besitzt eine Metrik mit konstanter positiver Schnittkrümmung.*

Aus bekannten Sätzen der Differentialgeometrie folgt aber, dass eine kompakte Dreimannigfaltigkeit mit konstanter positiver Schnittkrümmung isometrisch zu dem Quotienten von S^3 nach einer endlichen Gruppe von Isometrien ist, die ohne Fixpunkte operiert. Der Beweis von Thurstons Vermutung würde also tatsächlich den Beweis der Poincaré-Vermutung enthalten; er würde ausserdem nicht nur (höchstwahrscheinlich) mit einer Fields-Medaille belohnt, sondern auch noch mit einer Million Dollar – genügend Gründe also, um sich auf dieses höchst schwierige, aber auch äusserst reizvolle Gebiet einzulassen!

Literatur

- [1] Freedman, A.H.: The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. Geom.* 17 (1982), 357–453.
- [2] Milnor, J.: The Poincaré Conjecture. <http://www.claymath.org/prizeproblems/poincare.htm>
- [3] Poincaré, H.: *Œuvres*. Tome VI, Paris 1953.
- [4] Riemann, B.: *Gesammelte mathematische Werke*. 1876.
- [5] Smale, S.: Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Annals Math.* 74 (1961), 391–406.
- [6] Thurston, W.P.: Three-dimensional manifolds, kleinian groups, and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357–381.

Jochen Brüning
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
D-10099 Berlin
e-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de