Elem. Math. 57 (2002) 127 – 132
0013-6018/02/030127-6

Elemente der Mathematik

Die Hodge-Vermutung

Herbert Kurke

1 Einführung

Bekanntlich ist eine geschlossene, orientierbare Fläche S homöomorph zu einer Sphäre mit g Henkeln, d.h. S lässt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Sphäre mit g Henkeln abbilden. Die natürliche Zahl g wird das Geschlecht von S genannt; es ist eine topologische Invariante der Fläche S. Dieses Ergebnis lässt sich mit Hilfe der singulären Homologietheorie auch algebraisch beschreiben. Ist N eine n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit, d.h. N ist ein topologischer Hausdorff-Raum, der lokal zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, so können wir N die *singulären Homologiegruppen* $H_k(N)$ $(k \in \mathbb{Z})$ zuordnen. Diese werden durch gewisse rationale Linearkombinationen k-dimensionaler Simplices, den sogenannten *geschlossenen k-Ketten*, erzeugt. Es stellt sich heraus, dass die Isomorphieklassen der $\mathbb{Q}$-Vektorräume $H_k(N)$ topologische Invarianten der Mannigfaltigkeit N sind. Im Spezialfall $N = S$ stellen wir $H_1(S)$ als $2g$-dimensional fest, was zur gewünschten algebraischen Interpretation des Geschlechts g führt.

Neben den Homologiegruppen $H_*(N) = H_*(N, \mathbb{Q})$ mit rationalen Koeffizienten werden dual dazu auch die Kohomologiegruppen $H^*(N) = H^*(N, \mathbb{Q})$ der Mannigfaltigkeit N betrachtet. Für einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum K, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, setzen wir weiter $H_*(N,K) := H_*(N) \otimes K$, $H^*(N,K) := H^*(N) \otimes K$. Die Homologie- bzw. Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in K besitzen dann folgende Eigenschaften:

(i) Es besteht die Gleichheit $H^*(N,K) = \mathrm{Hom}(H_*(N), K)$.

(ii) $H^*(N)$ besitzt die Struktur einer graduierten, assoziativen Algebra; das Produkt von α mit β ist durch das Cup-Produkt $\alpha \cup \beta$ gegeben. $H_*(N,K)$ besitzt die Struktur eines graduierten $H^*(N)$-Moduls; die Modulstruktur ist durch das Cap-Produkt $\cap$ gegeben.

(iii) Ist die n-dimensionale Mannigfaltigkeit N geschlossen und orientiert, so besitzt $H_n(N)$ ein kanonisches erzeugendes Element, die *Fundamentalklasse* $[N]$; weiter ist $H_k(N) = 0$ für $k < 0$ und $k > n$.

(iv) Poincaré-Dualität: Ist N wiederum geschlossen und orientiert, so besteht eine Isomorphie $H^k(N) \cong H_{n-k}(N)$, gegeben durch die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha \cap [N]$.

(v) Ist M eine geschlossene, orientierte, p-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N, so induziert die Einbettung $i : M \to N$ einen Homomorphismus $i_* : H_p(M) \to H_p(N)$. Nach (iv) entspricht das Bild der Fundamentalklasse $i_*[M] \in H_p(N)$ einer

Kohomologieklasse in $H^{n-p}(N)$, welche wir mit $z(M)$ bezeichnen. Zwischen M und $z(M)$ besteht die Beziehung

$$(\alpha \cup z(M)) \cap [N] = i^*\alpha \cap [M] \qquad (\alpha \in H^p(N)).$$

Ist $K = \mathbb{R}$ und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so lassen sich die Kohomologiegruppen $H^k(N, K)$ mit den de Rhamschen Kohomologiegruppen $H^k_{\mathrm{DR}}(N, \mathbb{R})$ identifizieren; diese werden durch glatte, geschlossene Differentialformen vom Grad k erzeugt. Legt man auf N noch eine Riemannsche Metrik fest, so besagt der Satz von Hodge, dass für geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten N jede Kohomologieklasse in $H^k_{\mathrm{DR}}(N, \mathbb{R})$ durch genau eine *harmonische* Differentialform repräsentiert werden kann.

Ist nun $N = X$ eine komplexe, projektiv algebraische Mannigfaltigkeit, d.h. X ist gegeben als Nullstellenmenge homogener Polynome in einem komplexen, projektiven Raum, so geht es bei der Hodge-Vermutung darum, diejenigen Kohomologieklassen $\gamma \in H^*(X)$ zu charakterisieren, die Kohomologieklassen von *algebraischen* Untervarietäten Y sind, d.h. für die $\gamma = z(Y)$ gilt, wobei Y durch polynomiale Gleichungen definiert ist.

Um die Hodge-Vermutung im vierten Abschnitt genau formulieren zu können, besprechen wir im nächsten Abschnitt zunächst den Begriff einer „Hodge-Struktur" und wenden diesen dann im dritten Abschnitt auf die Kohomologie von sogenannten „Kähler-Mannigfaltigkeiten" an.

2 Hodge-Strukturen

Eine reelle Hodge-Struktur vom Gewicht k auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum H ist durch die folgenden, zueinander äquivalenten Daten gegeben:

(i) Eine Zerlegung von $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ in eine direkte Summe komplexer Unterräume $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ mit $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$ (Hodge-Zerlegung).

(ii) Eine absteigende Filtrierung $\{F^p\}$ von $H_{\mathbb{C}}$ durch komplexe Unterräume F^p, d.h. $H_{\mathbb{C}} \supseteq \ldots \supseteq F^p \supseteq F^{p+1} \supseteq \ldots \supseteq \{0\}$, so dass F^p und $\overline{F^{k-p+1}}$ zueinander komplementäre Unterräume sind (Hodge-Filtrierung).

(iii) Eine rationale Darstellung der Gruppe $R = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \right\}$ auf H vom Gewicht k, d.h. ein Homomorphismus $\rho_H : R \to \mathrm{GL}(H)$ mit der Eigenschaft $\rho_H \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^k \cdot \mathrm{id}$.

Die Äquivalenz von (i) mit (ii) ergibt sich aus $F^p = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}$ bzw. $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$. Die Äquivalenz von (i) mit (iii) ergibt sich aus der Tatsache, dass $H^{p,q}$ Eigenraum zum Charakter $z^p \overline{z}^q : R \to \mathbb{C}^*$ mit $z(g) = a + ib$, $\overline{z}(g) = a - ib$ ist.

Eine *Hodge-Struktur* vom Gewicht k ist eine reelle Hodge-Struktur H, in der ausserdem ein Gitter $H_{\mathbb{Z}} \subset H$, d.h. eine Untergruppe, die von einer Basis von H erzeugt wird, ausgezeichnet ist. *Morphismen* von Hodge-Strukturen H, H' sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\varphi : H \to H'$ mit $\varphi(H_{\mathbb{Z}}) \subseteq H'_{\mathbb{Z}}$, die nach $\mathbb{C}$-linearer Fortsetzung die Hodge-Zerlegung erhalten, also $\varphi(H^{p,q}) \subseteq H'^{p,q}$ bzw. $\varphi \circ \rho_{H'} = \rho_H \circ \varphi$ erfüllen.

3 Kähler-Mannigfaltigkeiten und projektive algebraische Mannigfaltigkeiten

Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur induziert rationale Darstellungen vom Gewicht 1 der Gruppe R (Abschnitt 2, (iii)) auf den Tangential- und Kotangentialräumen von X, als reelle glatte Mannigfaltigkeit aufgefasst, so dass $C = \varrho\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ der Multiplikation mit i entspricht. Daher wird eine Zerlegung des Raumes der glatten Differentialformen induziert, d.h.

$$A^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X).$$

Bezeichnen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ lokale holomorphe Koordinaten auf X, so ist eine (p,q)-Form η lokal gegeben durch

$$\eta = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n}} f_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q}(z,\bar{z})\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

wobei $f_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q}(z,\bar{z})$ glatte, komplexwertige Funktionen sind.

Indem wir X als $2n$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen, können wir X mit einer Riemannschen Metrik g versehen. Eine Metrik heisst *Kählersch*, wenn die Bilinearform $\omega(v,w) = g(Cv,w)$ alternierend und geschlossen ist, d.h. die Gleichung $d\omega = 0$ erfüllt; hierbei sind v, w Tangentialvektoren. Wir nennen ω eine *Kähler-Form* und das Paar (X,ω) eine *Kähler-Mannigfaltigkeit*, die Metrik ist dann $g(v,w) = \omega(v,Cw)$.

Ein wichtiges Beispiel ist der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ versehen mit der Fubini-Study-Metrik $\|\cdot\|$; in diesem Fall gilt

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \cdot \partial\bar{\partial} \log\left(\frac{\|z\|^2}{|z_0|^2}\right)$$

für $z = (z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit $z_0 \neq 0$. Die Fubini-Study-Metrik induziert auf jeder komplexen Untermannigfaltigkeit $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine Kähler-Metrik, so dass all diese Kähler-Mannigfaltigkeiten sind. Nach einem Satz von W.L. Chow sind die abgeschlossenen, analytischen Untervarietäten von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ genau die glatten, algebraischen Untervarietäten von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (siehe [6]).

Jede Kähler-Metrik einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit (X,ω) definiert nicht verschwindende Kohomologieklassen

$$[\omega^k] \in H^{2k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R}) \quad (k = 1, \ldots, \dim(X)).$$

Wenn $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Q})$ ist, so heisst (X,ω) eine *Hodge-Mannigfaltigkeit*. Dies ist z.B. für projektiv algebraische Mannigfaltigkeiten der Fall; daher taucht für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in der Formel für ω der Normierungsfaktor $1/\pi$ auf. Nach dem Einbettungssatz von Kodaira gilt nun auch die Umkehrung: Wenn für eine geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit (X,ω) die Klasse $[\omega]$ rational ist, d.h. $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Q})$ gilt, so besitzt X

eine projektive Einbettung, so dass ein Vielfaches $k \cdot [\omega]$ von $[\omega]$ die Fubini-Study-Klasse enthält.

Das Besondere im Falle von kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten (X, ω) ist das folgende: Definiert man den Operator L durch $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ und bezeichnet mit Λ den zu L (punktweise) adjungierten Operator, so zeigt sich, dass im Kählerschen Fall der Laplace-Operator Δ (ein natürlicher Differentialoperator 2. Ordnung) sowohl mit den Operatoren L und Λ als auch mit der Operation der Gruppe R aus Abschnitt 2 vertauscht. Als Folge daraus erhält man für kompakte, n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeiten:

(i) $H^k(X, \mathbb{R})$ besitzt eine kanonische Hodge-Strukur vom Gewicht k, d.h. $H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$, wobei die Räume $H^{p,q}(X)$ durch gewisse (p,q)-Formen erzeugt werden.

(ii) Die Kähler-Form ω induziert zueinander adjungierte Operatoren L bzw. Λ auf $H^*(X, \mathbb{R})$ vom Grad 2 bzw. -2 (genauer: $L \in \mathrm{Hom}(H^k(X, \mathbb{R}), H^{k+2}(X, \mathbb{R}))^{(1,1)}$ bzw. $\Lambda \in \mathrm{Hom}(H^k(X, \mathbb{R}), H^{k-2}(X, \mathbb{R}))^{(-1,-1)}$).

(iii) Durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mapsto a\Pi + b\Lambda + cL \quad (\text{mit } \Pi = (k-n) \cdot \mathrm{id}\,\text{auf } H^k(X, \mathbb{R}))$$

wird $H^*(X, \mathbb{R})$ zu einer Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

(iv) Die Abbildung $H^k(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{L} H^{k+2}(X, \mathbb{R})$ ist injektiv für $k \leq n-1$ und surjektiv für $k \geq n-1$; die Abbildung $H^{p,q}(X) \xrightarrow{L} H^{p+1,q+1}(X)$ ist injektiv für $p+q \leq n-1$ und surjektiv für $p+q \geq n-1$.

(v) Harter Lefschetz-Satz: Die Abbildung $H^{n-k}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{L^k} H^{n+k}(X, \mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus.

4 Die Hodge-Vermutung

4.1 Zyklenabbildung, Niveau-Filtrierung

Es sei X wiederum eine n-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subseteq X$ eine analytische Untervarietät der Kodimension $\mathrm{kodim}(Y, X) = n - \dim(Y) = p$. Die Untervarietät Y definiert nach dem im ersten Abschnitt Gesagten eine Kohomologieklasse $z(Y) \in H^{2p}(X)$. Weiter besteht eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^k(Y) \longrightarrow H^{k+2p}(X) \longrightarrow H^{k+2p}(X \setminus Y) \longrightarrow \ldots$$

Die *Niveau-Filtrierung* $N^pH^*(X)$ von $H^*(X)$ wird dann durch

$$N^pH^*(X) = \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \mathrm{kodim}(Y,X) \geq p}} \mathrm{Ker}\,(H^*(X) \longrightarrow H^*(X \setminus Y))$$

definiert. Sie ist über $\mathbb{Q}$, ja sogar über $\mathbb{Z}$, definiert; daher gilt $N^pH^*(X, K) = N^pH^*(X) \otimes K$ für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Es lässt sich nun zeigen, dass die Niveau-Filtrierung feiner als die Hodge-Filtrierung ist, d.h. es besteht die Inklusion

$$N^pH^*(X, \mathbb{C}) \subseteq F^pH^*(X) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}(X).$$

Weiter stellt man $N^pH^m(X,\mathbb{Q}) = 0$ für $m < 2p$ fest; damit erhalten wir für $k \geq 0$

$$N^pH^{2p+k}(X,\mathbb{C}) \subseteq H^{p,p+k}(X) \oplus H^{p+1,p-1+k}(X) \oplus \cdots \oplus H^{p+k,p}(X)\,.$$

Speziell erkennen wir $z(Y)$ als ein Element von $H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$.

4.2 Hodge-Vermutung

Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subseteq X$ eine analytische Untervarietät, so haben wir soeben festgestellt, dass $z(Y) \in H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ gilt. Die populäre Form der Hodge-Vermutung ist nun die Umkehrung diese Sachverhalts (siehe [4]):

Hodge-Vermutung: Der Durchschnitt $H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ wird durch die Kohomologieklassen $z(Y)$, die zu algebraischen Untervarietäten $Y \subseteq X$ gehören, erzeugt.

Die von Hodge 1950 formulierte Vermutung wurde 1969 durch A. Grothendieck präzisiert (siehe [3]):

Allgemeine Hodge-Vermutung: Für $m \geq 2p$ ist jede über $\mathbb{Q}$ definierte Unter-Hodge-Struktur $V \subseteq H^m(X,\mathbb{Q})$ von $H^m(X,\mathbb{R})$ mit $V^{j,k} = 0$ für $|j-k| > m-2p$ in $N^pH^m(X,\mathbb{Q})$ enthalten.

Für $m = 2p$ fällt die allgemeine Hodge-Vermutung mit der populären Form zusammen. Die ursprüngliche Vermutung, dass $N^pH^m(X,\mathbb{Q})$ selbst eine Unter-Hodge-Struktur von $H^m(X)$ ist, hat Grothendieck anhand eines Beispiels, Produkt von 3 geeignet gewählten elliptischen Kurven, widerlegt. Hodge selbst hatte seine Vermutung für ganzzahlige Kohomologieklassen formuliert; dies war zu optimistisch, wie M.F. Atiyah und F. Hirzebruch in [1] gezeigt haben, so dass die Vermutung auf rationale Kohomologieklassen bezogen wurde.

4.3 Der Fall $m = 2$

Ist X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $\mathscr{L}$ ein komplexes Geradenbündel auf X, so findet man dazu einen Zusammenhang ∇, so dass dessen Krümmung $\nabla \circ \nabla$ eine Form vom Typ $(1,1)$ ist. Zerlegt man ∇ in Formen vom Typ $(1,0)$ und $(0,1)$, d.h.

$$\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}\,,$$

so folgt $\nabla^{0,1} \circ \nabla^{0,1} = 0$. Dies ist aber gerade die Integrabilitätsbedingung für die Existenz lokaler, nicht verschwindender Schnitte s von $\mathscr{L}$ mit $\nabla^{0,1}s = 0$, welche zu einer holomorphen Struktur auf $\mathscr{L}$ führt. Mit Hilfe solcher Schnitte können wir nun die erste Chern-Form und somit die erste Chern-Klasse $c_1(\mathscr{L})$ von $\mathscr{L}$ definieren; sie ist eine Kohomologieklasse vom Typ $(1,1)$. Indem wir die Gruppe der Isomorphieklassen holomorpher Geradenbündel auf X mit $\mathrm{Pic}(X)$ bezeichnen, erhalten wir das folgende Ergebnis:

Auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten X ist das Bild von $\mathrm{Pic}(X)$ unter c_1 in $H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ gleich dem Durchschnitt von $H^{1,1}(X)$ mit dem Bild von $H^2(X,\mathbb{Z})$.

Auf projektiv algebraischen Mannigfaltigkeiten besitzt nach [6] jedes holomorphe Geradenbündel $\mathscr{L}$ einen meromorphen Schnitt $s \neq 0$. Diesem Schnitt lässt sich ein Divisor $\mathrm{div}(s) = \sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$ zuordnen; diese Schreibweise bedeutet, dass der Schnitt s entlang V_α

eine n_α-fache Nullstelle bzw. Polstelle hat, wenn $n_\alpha > 0$ bzw. $n_\alpha < 0$ ist. Zwischen der ersten Chern-Klasse von $\mathscr{L}$ und dem Divisor $\operatorname{div}(s)$ besteht nun der Zusammenhang

$$c_1(\mathscr{L}) = \sum_\alpha n_\alpha z(V_\alpha)\,,$$

was gerade die Bestätigung der Hodge-Vermutung für Kozyklen der Kodimension 2 bedeutet.

Für $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ist die Kähler-Form ω der Fubini-Study-Metrik die erste Chern-Form des Hopf-Bündels. Damit sind die Operatoren L und Λ auf projektiven algebraischen Varietäten über $\mathbb{Q}$ definiert, also gilt der harte Lefschetz-Satz bereits für $H^*(X, \mathbb{Q})$. Der Operator L entspricht dabei dem Cup-Produkt mit der Zykel-Klasse $z(H)$ eines Hyperebenenschnittes H. Aufgrund des harten Lefschetz-Satzes gilt dann die Hodge-Vermutung also auch für Kozyklen der Kodimension 2. Darüber hinaus sind bis heute aber nur Spezialfälle bekannt, in denen die Hodge-Vermutung richtig ist.

Literatur

[1] Atiyah, M.F.; Hirzebruch, F.: Analytic cycles on complex manifolds. *Topology* 1 (1962), 25–45.

[2] Deligne, P.: The Hodge conjecture. http://www.claymath.org/prizeproblems/hodge.htm

[3] Grothendieck, A.: Hodge's general conjecture is false for trivial reasons. *Topology* 8 (1969), 299–303.

[4] Hodge, W.V.D.: *The topological invariants of algebraic varieties*. Proc. ICM (1950), 181–192.

[5] Kodaira, K.; Spencer, D.C.: Divisor classes on algebraic varieties. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 39 (1953), 872–877.

[6] Serre, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1956), 1–42.

[7] Weil, A.: *Introduction à l'étude des variétés Kaehleriennes*. Publ. Univ. Nancago VI (1958).

Herbert Kurke
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
D–10099 Berlin
e-mail: `kurke@mathematik.hu-berlin.de`