
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 2003 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1184: Nach einem Orakelspruch sollte die Pest in Griechenland dann zu Ende gehen, wenn der würfelförmige Altar im Apollonheiligtum auf Delos verdoppelt werde. Der Spruch verlangt die (unmögliche) Konstruktion der Kante des neuen Altars mit Zirkel und Lineal. Bei Ausgrabungen auf Delos soll nun aber ein Granitquader, dessen Kanten sich wie $2 : 1 : 1$ verhalten, gefunden worden sein. Damit drängt sich eine neue Deutung des Orakelspruches auf: Ein Quader vom Typus $2 : 1 : 1$ ist so (in Polyeder) zu zerlegen, dass sich aus den Teilen ein Würfel bilden lässt. Gibt es eine solche Zerlegung? Wenn ja, gebe man eine

- leicht zu realisierende Zerlegung für Steinmetze und Puzzelfreunde an.
- Zerlegung mit einer (möglichst) kleinen Anzahl von Stücken an.

Ernst Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1185: Adjungiert man zum Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen die Elemente a mit $a^3 + a + 1 = 0$ und di mit $d^2 = 3a^2 + 4$ und $i^2 = -1$ (in dieser Reihenfolge), so entsteht der Körper $\mathbb{Q}(a, di)$. Bestimme all seine Teilkörper.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1186 (Die einfache dritte Aufgabe): In einem konvexen Achteck mit lauter gleichen Innenwinkeln haben alle Seiten rationale Längen. Zeige, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Oleg Faynsteyn, Leipzig, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2001

Aufgabe 1171. Es sei $A = (a_{ij})$ eine normale nichtsymmetrische reelle 3×3 -Matrix. Beweise, dass

$$\begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A ist.

Lajos László, Budapest, H

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingetroffen: Beat Fischer (Basel, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Götz Trenkler (Dortmund, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Roland Wyss argumentiert wie folgt: Eine (komplexe) quadratische Matrix heisst normal, wenn $A^*A = AA^*$, wobei A^* die zu A adjungierte Matrix bezeichnet. Im Falle reeller Matrizen geht diese Bedingung über in $A^T A = AA^T$ (A^T bezeichnet die zu A transponierte Matrix).

Weil A nichtsymmetrisch ist, wird mit

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$S = A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

schiefsymmetrisch vom Rang 2, und der Kern von S ist deshalb eindimensional. Weil $S \cdot \vec{e} = \vec{0}$ gilt, liegt \vec{e} im Kern von S .

Aus der Normalität von A folgt

$$A \cdot S = A \cdot (A - A^T) = A^2 - A \cdot A^T = A^2 - A^T \cdot A = (A - A^T) \cdot A = S \cdot A.$$

Multipliziert man die Gleichung $\vec{0} = S \cdot \vec{e}$ von links mit A , so folgt

$$\vec{0} = A \cdot \vec{0} = A \cdot (S \cdot \vec{e}) = (A \cdot S) \cdot \vec{e} = (S \cdot A) \cdot \vec{e} = S \cdot (A \cdot \vec{e}),$$

also gehört neben \vec{e} auch $A \cdot \vec{e}$ zum (eindimensionalen) Kern von S ; deshalb muss $\lambda \cdot \vec{e} = A \cdot \vec{e}$ gelten.

Aufgabe 1172. Beweise: Das Inkreiszentrum eines Dreiecks liegt genau dann auf der Eulerschen Geraden, wenn das Dreieck gleichschenkelig ist.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: Gheorge Bercea (München, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D) (2 Lösungen), Walther Janous (Innsbruck, A), P. Nüesch (Lausanne, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) (2 Lösungen), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Gheorghe Bercea rechnet in baryzentrischen Koordinaten. Im Dreieck mit den Seiten a , b , c und den Winkeln α , β , γ und der Fläche F besitzt der Inkreismittelpunkt die Koordinaten $I(a, b, c)$. Die Koordinaten des Schwerpunktes und des Umkreismittelpunktes sind durch $S(1, 1, 1)$ und $U(\sin(2\alpha), \sin(2\beta), \sin(2\gamma))$ gegeben. I liegt genau dann auf der Eulerschen Geraden SU , wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin(2\alpha) & \sin(2\beta) & \sin(2\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Es gilt $\Delta = (b - c) \sin(2\alpha) + (c - a) \sin(2\beta) + (a - b) \sin(2\gamma)$. Verwendet man

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \frac{2F(b^2 + c^2 - a^2)}{b^2c^2}, \\ \sin(2\beta) &= \frac{2F(c^2 + a^2 - b^2)}{c^2a^2}, \\ \sin(2\gamma) &= \frac{2F(a^2 + b^2 - c^2)}{a^2b^2}, \end{aligned}$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\Delta = \frac{2F}{a^2b^2c^2}(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Mehrere Löser rechnen – vielleicht angeregt durch den Artikel von *M. Longuet* auf Seite 122 – in trilinearen Koordinaten. Für die Punkte I , S und U hat man die Koordinaten $I(1, 1, 1)$, $S(bc, ac, ab)$ und $U(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$. Die Determinante

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \end{vmatrix},$$

deren Verschwinden gleichbedeutend damit ist, dass I auf der Eulerschen Geraden liegt, hat den Wert $\overline{\Delta} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2 / (2abc)$.

Aufgabe 1173 (Die einfache dritte Aufgabe). Es sei A eine quadratische (reelle oder komplexe) Matrix, die die Gleichung $A^2 = -A$ erfüllt. Zeige, dass zwischen dem Rang und der Spur der Matrix A die Beziehung $\text{rk}(A) = -\text{tr}(A)$ besteht.

Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH) (2 Lösungen), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Beat Fischer (Basel, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A),

Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Mehrere Lösungen enthielten den Fehlschluss, dass bei der nach einer unitären Transformation entstehenden Dreiecksmatrix die Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente mit dem Rang der Diagonalmatrix übereinstimmt. *Bernhard Ruh* argumentiert wie folgt: Ist λ ein Eigenwert von A , so sind $-\lambda$ resp. λ^2 Eigenwerte von $-A$ resp. von A^2 . Wegen $A^2 = -A$ kann A also nur die Eigenwerte 0 und -1 besitzen. Die Jordansche Normalform J von A enthält demnach in der Diagonalen nur 0 oder -1 (und in der oberen Nebendiagonalen steht nur 0 oder 1). Aus $A^2 = -A$ folgt $J^2 = -J$, und eine explizite Rechnung zeigt, dass das nur möglich ist, wenn die Nebendiagonale aus lauter Nullen besteht. Da Rang und Spur ähnlichkeitsinvariant sind, folgt die Behauptung.

Korrigendum: In der Lösung von Aufgabe 1168 im Heft 2 sollte der im Diagramm gezeichnete Zustand Nummer 1 den Wert 1 haben (anstatt 0).