

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen der Aufgaben 1193, 1194, 1196 sind bis zum 10. November 2003 erbeten, für die Aufgabe 1195A ist kein Termin gesetzt. Anschrift:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1193:** Durch Hintereinanderschreiben der Glieder der rekursiv gegebenen Folgen

$$\begin{array}{l} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \\ b_1 = 1, \quad b_2 = 3 \end{array}$$

bilden wir die beiden nichtabbrechenden Dezimalzahlen

$$a = 0.112358132134\dots \quad \text{und} \quad b = 0.134711182947\dots$$

Man zeige, dass  $a$  und  $b$  irrational sind.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

**Aufgabe 1194:** Bei einer Sportveranstaltung, an welcher  $n$  Sportler teilnehmen, werden die besten  $r$  Sportler ( $r \leq n$ ) in die Rangliste aufgenommen. Vorausgesetzt, dass die besten  $r$  Teilnehmer unterschiedlich gut abgeschnitten haben, gibt es  $n!/(n-r)!$  mögliche Ranglisten. Sind jedoch mehrere Teilnehmer ex aequo platziert, so werden die darauffolgenden Ränge nicht vergeben; bei  $r = 4$  Rängen sind die Rangfolgentypen 1111, 1114, 1133, 1134, 1222, 1224, 1233, 1234 möglich. Hingegen sind 1122 oder 1113 keine möglichen Rangfolgentypen.

Bestimme die Anzahl  $b(n, r)$  von möglichen Ranglisten.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1195A:** Die 81 verschiedenen Karten eines (im Handel erhältlichen) Kartenspiels unterscheiden sich in vier Merkmalen:

- Anzahl der aufgedruckten gleichartigen Symbole: jeweils 1, 2 oder 3 Stück,
- Farbe der aufgedruckten Symbole: alle sind rot oder violett oder türkis,
- Form der aufgedruckten Symbole: alle sind oval oder wellenförmig oder balkenartig,
- Füllung der aufgedruckten Symbole: alle sind leer oder ganz gefüllt oder schraffiert.

Eine Auswahl von drei Karten heisst ein „Set“, wenn für jedes der vier Merkmale gilt, dass die drei Karten in diesem Merkmal vollständig übereinstimmen oder dass keinerlei Übereinstimmung in diesem Merkmal besteht. Beispielsweise bilden die drei Karten mit 3 roten schraffierten Wellen, 2 roten vollen Wellen und 1 roten leeren Welle ein „Set“. Hingegen bilden die drei Karten mit 3 violetten leeren Balken, 3 türkisfarbenen leeren Balken und 3 roten vollen Balken kein „Set“.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter  $n = 12$  zufällig gewählten Karten mindestens ein „Set“ befindet?
- Für welche kleinste Anzahl Karten  $n$  ist diese Wahrscheinlichkeit 1?

Ludger Weber, Lausanne, CH und Jon Florin, Chur, CH

**Aufgabe 1196 (Die einfache (?) dritte Aufgabe):** An einen vom Wendepunkt verschiedenen Punkt  $A$  einer kubischen Parabel legen wir die Tangente  $t_A$ ; sie hat mit der Kurve noch einen weiteren Punkt  $B$  gemeinsam. Mit  $F_1$  bezeichnen wir den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der Kurve und  $t_A$  eingeschlossen wird. An den Punkt  $B$  legen wir nun die Kurventangente  $t_B$ , welche die kubische Parabel noch in  $C$  schneidet; das von der Kurve und  $t_B$  begrenzte endliche Flächenstück besitze den Inhalt  $F_2$ .

- Wie gross ist das Verhältnis  $F_1/F_2$ ?
- Wie lässt sich das Ergebnis auf Graphen von Polynomen vom Grad  $n > 3$  verallgemeinern?

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2002

**Aufgabe 1181.** Im ebenen Gitter betrachten wir rote und blaue minimale Gitterwege; die roten Wege verbinden den Punkt  $(0, m)$  mit dem Punkt  $(n, 0)$ , die blauen führen von  $(0, 0)$  nach  $(n, m)$ . Unter diesen Wegpaaren gibt es solche, die sich in einem Punkt der Geraden  $y = k$  rechtwinklig kreuzen und bei denen der rote Weg diesen Punkt horizontal passiert. Berechne – in Abhängigkeit von  $n$  und  $m$  – die Anzahl dieser Wege für  $k = 1$  und für  $k = 2$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), und Roland Wyss (Flumenthal, CH) haben diese Aufgabe gelöst. Die Lösungswege unterscheiden sich nur in der Ausführlichkeit, mit welcher die verwendeten Summenformeln begründet werden.

Im Sinne der Aufgabenstellung soll sich ein Kreuzungspunkt ganz im Innern des vorgelegten Gitters befinden, so dass man für beliebiges  $k$  ( $1 \leq k \leq m - 1$ ) ein „Kreuz“ in  $(\ell, k)$  mit  $1 \leq \ell \leq n - 1$  betrachten kann. Die Strecke von  $L(\ell - 1, k)$  nach  $R(\ell + 1, k)$  ist Teil des roten Weges, jene von  $U(\ell, k - 1)$  nach  $O(\ell, k + 1)$  gehört zum blauen Weg. Mit dem bekannten Resultat, dass die Anzahl der von  $(0, 0)$  nach  $(u, v)$  führenden minimalen Gitterwege  $\binom{u+v}{u} = \binom{u+v}{v}$  beträgt, ergeben sich  $\binom{\ell+k-1}{k-1}$  blaue Teilwege von  $(0, 0)$

nach  $U$  und  $\binom{n-\ell+m-k-1}{m-k-1}$  blaue Teilwege von  $O$  nach  $(n, m)$ . Entsprechend erhält man  $\binom{\ell-1+m-k}{m-k}$  rote Teilwege von  $(0, m)$  nach  $L$ , und von  $R$  nach  $(n, 0)$  führen  $\binom{n-\ell-1+k}{k}$  rote Teilwege.

Die Anzahl verschiedener Gitterwege der verlangten Art lautet somit

$$G_k(n, m) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{\ell+k-1}{k-1} \binom{n-\ell+m-k-1}{m-k-1} \binom{\ell-1+m-k}{m-k} \binom{n-\ell-1+k}{k}.$$

Für  $k = 1$  erhält man mit einem CAS – aber auch schon mit einem guten Taschenrechner –

$$G_1(n, m) = (m-1) \binom{2m+n-3}{2m-1},$$

und für  $k = 2$  ergibt sich

$$G_2(n, m) = (m-2) \left( (m-1)^2 \binom{2m+n-5}{2m-1} + 2n \binom{2m+n-5}{2m-3} \right).$$

**Aufgabe 1182.** Man finde einen (möglichst einfachen) Algorithmus, welcher entscheidet, ob sich zwei durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gegebene Strecken schneiden.

Albert Fässler, Evilard, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: Gheorge Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Ignace Morand (Préverenges, CH), Hansklaus Rummeler (Fribourg, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Marcel Wild (Matieland, ZA), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die eingesandten Lösungen zerfallen in zwei Kategorien. Viele Löser, unter ihnen *Gheorge Bercea* und *Roland Wyss*, betrachten die Orientierung gewisser Hilfsdreiecke: In der Ebene lässt sich bekanntlich der orientierte Flächeninhalt eines Dreiecks  $PQR$  nach der Formel

$$(PQR) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

aus den Eckpunktkoordinaten berechnen.

Die Strecken  $AD$  und  $BC$  schneiden sich genau dann, wenn

1. die Punkte  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $BC$  liegen, die orientierten Flächen  $(ABC)$  und  $(BCD)$  also unterschiedliche Vorzeichen haben:  $(ABC) \cdot (BCD) \leq 0$ ;
2. die Punkte  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AB$  liegen, die orientierten Flächen  $(CDA)$  und  $(DAB)$  also unterschiedliche Vorzeichen haben:  $(CDA) \cdot (DAB) \leq 0$ .

Mehrere Löser gehen vor wie *Hansklaus Rummler*: Um zu entscheiden, ob sich die Strecken  $AD$  und  $BC$  schneiden, nehmen wir zunächst an, dass die Vektoren  $\overrightarrow{AD}$  und  $\overrightarrow{BC}$  linear unabhängig sind. Dann lässt sich  $C$  eindeutig als

$$C = A + \lambda \cdot \overrightarrow{AD} + \mu \cdot \overrightarrow{BC}$$

darstellen, und der Schnittpunkt  $S$  der beiden Geraden  $AD$  und  $BC$  ist

$$S = A + \lambda \cdot \overrightarrow{AD} = B + (1 - \mu) \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Dieser Schnittpunkt liegt also genau dann auf den beiden Strecken  $AD$  und  $BC$ , wenn  $\lambda, \mu \in [0, 1]$  gilt. Für  $\lambda$  und  $\mu$  ergibt sich mittels der Cramerschen Regel

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_1 & c_1 - b_1 \\ c_2 - a_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 - a_1 & c_1 - b_1 \\ d_2 - a_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix}}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 - a_1 & c_1 - b_1 \\ d_2 - a_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix}}.$$

Die Entscheidung erfordert also die Berechnung von drei Determinanten sowie deren Vergleich. Verschwindet die Nennerdeterminante, so sind  $\overrightarrow{AD}$  und  $\overrightarrow{BC}$  linear abhängig, und das weitere Vorgehen hängt davon ab, was man unter „sich schneiden“ verstehen soll.

**Aufgabe 1183 (Die einfache dritte Aufgabe).** Wir betrachten  $d$ -stellige Zahlen mit lauter gleichen Ziffern  $\delta \neq 0$ . Beispielsweise hat man für  $\delta = 7$  und  $d = 8$  die Zahl 77777777. Wir teilen die Differenz aus einer solchen Zahl und ihrer Quersumme durch  $9 \cdot \delta$ :

$$\frac{77777777 - 63}{9 \cdot 7} \quad \frac{6666666 - 42}{9 \cdot 6}$$

$$\frac{222 - 6}{9 \cdot 2} \quad \frac{55555 - 25}{9 \cdot 5}$$

Man drücke das Ergebnis dieser Division durch  $d$  und  $\delta$  aus und betrachte insbesondere den Fall  $d > 10$ .

Uwe Hassler, Berlin, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 9 Zuschriften eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hanfried Lenz (Berlin, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender finden heraus, dass das Ergebnis von  $\delta$  unabhängig ist. Für  $d < 10$  ist es die Zahl, die aus den ersten  $d - 1$  Ziffern in aufsteigender Folge besteht, für  $d = 7$  beispielsweise die Zahl 123456. Für  $d > 10$  besteht das Resultat aus mehreren Blöcken 012345679, wobei aber in den hinteren Blöcken „Störungen“ auftreten. *Hanfried Lenz* und *Jany C. Binz* kriegen auch diese „Störungen“ in den Griff: Das Ergebnis

$$E_d = \frac{n - d \cdot \delta}{9\delta} = \frac{\frac{10^d - 1}{9} \cdot \delta - d \cdot \delta}{9\delta} = \frac{\frac{10^d - 1}{9} - d}{9}$$

ist von  $\delta$  unabhängig. Dass  $E_d$  ganzzahlig ist, folgt schnell aus  $E_1 = 0$  und der offensichtlichen Rekursion  $E_{d+1} = 10 \cdot E_d + d$ .

Die Zahl  $d$  lässt sich eindeutig in der Form  $d = 9a + r$ ,  $0 \leq r < 9$ ,  $a \geq 0$ ,  $a, r \in \mathbb{Z}$  schreiben. Dann ist

$$E_d = \frac{\frac{10^d - 1}{9} - d}{9} = \frac{\frac{10^{9a+r} - 1}{9} - 9a - r}{9} = \frac{\frac{10^{9a+r} - 1}{9} - r}{9} - a.$$

Mit den Beziehungen

$$E_d + a = \frac{\frac{10^d - 1}{9} - r}{9} = \left[ \frac{10^d - 1}{81} \right] = \left[ \frac{10^d}{81} \right] = 10^{d-1} \cdot \left[ \frac{10}{81} \right]$$

folgt nun, dass die Zahl  $E_d + a$  aus den ersten  $d - 1$  Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von

$$\frac{10}{81} = 0.123456790123456790 \dots$$

besteht.

Einige Beispiele:

$d$	$a$	$r$	$E_d + a$	$E_d$
7	0	7	123456	123456
10	1	1	123456790	0123456789
17	1	8	1234567901234567	1234567901234566
18	2	0	12345679012345679	12345679012345677
19	2	1	123456790123456790	123456790123456788

Mehrere Löser machen darauf aufmerksam, dass ein analoges Resultat auch in Positionssystemen mit beliebiger Basis  $g$  gilt. Die Zahl

$$\overline{E}_d = \frac{n - d \cdot \delta}{(g-1) \cdot \delta} = \frac{g^d - (g-1)d - 1}{(g-1)^2}$$

lässt sich nach *Jürgen Spilker* als

$$\overline{E}_d = \sum_{\ell=2}^d \binom{d}{\ell} (g-1)^{\ell-2}$$

oder nach *Roland Wyss* als

$$\overline{E}_d = \sum_{\ell=1}^{d-1} \ell \cdot g^{d-1-\ell}$$

schreiben und ist somit ganzzahlig. Überlegungen zu „Ziffernspielereien“ hat für diesen Fall niemand angestellt.