
60°-Verwandte der pythagoreischen Zahlentripel

Albrecht Schultz

Albrecht Schultz, 1946 geboren, studierte an der Universität Heidelberg Physik und Mathematik für das Lehramt an Gymnasien und promovierte dort 1975. Seitdem übt er den Lehrerberuf aus, zunächst an einem Privatgymnasium in Bayern, dann – mit einer fünfjährigen Unterbrechung in Versailles (deutsch-französisches Gymnasium) – an einem staatlichen rheinland-pfälzischen Gymnasium. Nebenbei ist er seit einigen Jahren am Institut für Physik der Universität Koblenz-Landau als Lehrbeauftragter tätig.

1 Pythagoreische Zahlentripel

Für welche rechtwinkligen Dreiecke sind die Seitenlängen ganzzahlig? Das ist ein uraltes Thema. Eine altbabylonische Keilschrifttafel aus der ersten Hälfte des zweiten Jahrtausends v.Chr. („Plimpton 322“) enthält 15 Lösungstripel der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$. Man muss annehmen, dass sie auf einer besonderen Rechenvorschrift beruhen, vielleicht auf der Beziehung $a^2 = (c + b)(c - b)$ [5]. Pythagoras soll bereits die Parameterdarstellung

$$(a, b, c) := (2\lambda^2 + 2\lambda, 2\lambda + 1, 2\lambda^2 + 2\lambda + 1) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

gekannt haben. Sie ist lückenhaft; so wird z.B. das Tripel (8, 15, 17) nicht generiert. Bei Euklid (Elemente X, §§28–29) findet man die vollständige Darstellung $a := 2mn$,

Ein bekanntes Verfahren zur Erzeugung pythagoreischer Tripel beruht auf dem Schnitt von Geraden rationaler Steigung mit dem Einheitskreis; es resultieren rationale Schnittpunkte, die zu Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ in ganzen Zahlen führen, zu den Seitenlängen pythagoreischer Dreiecke. Hier wird dieses auf die Antike (Diophant) zurückgehende „Sekantenverfahren“ benutzt, um ganzzahlige Lösungen für die Seitenlängen anderer besonderer Dreiecke zu finden: Geraden mit rationaler Steigung werden mit Ellipsen $x^2 + y^2 \pm xy = 1$ geschnitten. Dabei ergeben sich rationale Punkte, denen wieder ganzzahlige Tripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 \pm ab = c^2$ entsprechen. Derartige Tripel sind die Seitenlängen von 120°- und 60°-Dreiecken. Detaillierte Überlegungen führen zu Parameterdarstellungen für sämtliche 60°- und 120°-Tripel mit teilerfremden Komponenten a, b, c .

$b := m^2 - n^2$, $c := m^2 + n^2$. Mit $m := \lambda + 1$, $n := \lambda$ erhält man die Pythagoras zugeschriebenen speziellen Lösungstripel.

Es gibt verschiedene Wege zu beweisen, dass die pythagoreischen Tripel die von Euklid angegebene Form haben. Die sogenannte Sekantenmethode ist wegen ihres Reichtums an innermathematischen Beziehungen interessant; sie kann als geometrische Interpretation des von Diophant im zweiten Buch seiner Arithmetika (ca. 250 n.Chr.) beschriebenen Lösungsverfahrens angesehen werden. Dabei wird ein verblüffend einfacher Trick verwendet, der es erlaubt, aus einem gegebenen rationalen Punkt eines Kegelschnitts sofort alle derartigen Punkte zu gewinnen ([1, §5], [3, S. 169ff.]). Obwohl das Sekantenverfahren für die pythagoreischen Tripel an vielen Stellen beschrieben ist, soll es hier kurz dargestellt werden, weil es auch in den folgenden Abschnitten zur Anwendung kommt.

Satz 1 Jedes pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) ist proportional zu einem Tripel der Form

$$a := 2mn, \quad b := m^2 - n^2, \quad c := m^2 + n^2$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$.

Beweis. Mit $x := a/c$, $y := b/c$ erhält man aus jedem pythagoreischen Tripel eine Lösung der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

in positiven rationalen Zahlen. Umgekehrt erhält man aus jeder solchen Lösung sofort ein pythagoreisches Zahlentripel, indem man die beiden Brüche x und y auf denselben Nenner c bringt. Das Problem ist damit auf die Bestimmung der rationalen Lösungen von (1) zurückgeführt.

Eine spezielle rationale Lösung von (1) ist offensichtlich der Punkt $P := (0, -1)$. Man zieht durch diesen Punkt die Gerade $g: y = kx - 1$ mit der rationalen Steigung $k > 1$ (Fig. 1). Sie trifft den Kreis in einem zweiten Punkt $S := (x, y)$, dessen Koordinaten positiv und rationale Funktionen von k sind. Die Rechnung liefert nämlich

$$x = \frac{2k}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \quad (2)$$

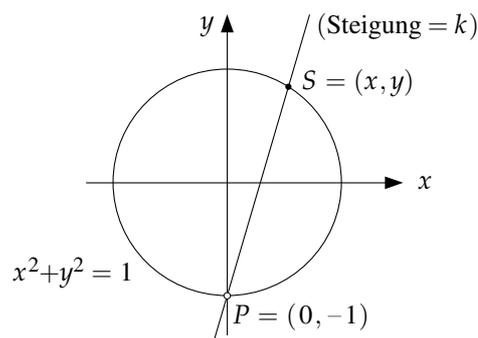


Fig. 1

Ist umgekehrt (x, y) eine im ersten Quadranten gelegene rationale Lösung von (1) und S der zugehörige Kreispunkt, so ist die Steigung k der Geraden durch P und S rational und > 1 ; der Punkt (x, y) wird also durch (2) geliefert. Die sämtlichen positiven rationalen Lösungen von (1) sind somit gegeben durch (2) mit $k \in \mathbb{Q}$, $k > 1$.

Mit $k := m/n$, $m > n$, folgt aus (2):

$$\frac{a}{c} = x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad \frac{b}{c} = y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

und daraus ergeben sich genau die angegebenen Tripel. \square

Wir verzichten hier darauf, mit Hilfe von Teilbarkeitsuntersuchungen eine vollständige Liste von „primitiven“ (s.u.) pythagoreischen Tripeln herzustellen.

2 120°-Tripel

Die pythagoreischen Tripel zogen schon immer die Aufmerksamkeit der Zahlenfreunde und -tüftler auf sich. Das Sekantenverfahren am Kreis steht überdies im Zusammenhang mit einem grossen Thema der Zahlentheorie, der Suche nach rationalen Punkten auf algebraischen Kurven, und ist hierfür das einfachste Beispiel. Das erweiterte Problem: „Wie erhält man ganzzahlige Lösungen, wenn man nach den Seiten in anderen besonderen Dreiecken fragt?“, wird seltener betrachtet und ist das Hauptanliegen dieser Arbeit. Statt des Satzes von Pythagoras muss jetzt dessen Verallgemeinerung, der Cosinussatz

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma = c^2, \quad \gamma := \angle(a, b),$$

zugrunde gelegt werden. Sollen hier a , b und c ganzzahlig sein, so muss $\cos \gamma$ rational sein. Ausser 90° sind 60° und 120° die einzigen rationalen Vielfachen des Vollwinkels, für die das der Fall ist. Wir machen uns daher auf die Suche nach ganzzahligen 60° - bzw. 120° -Tripeln (a, b, c) .

Satz 2 Jedes 120° -Zahlentripel (a, b, c) ist proportional zu einem Tripel der Form

$$a := 2mn + n^2, \quad b := m^2 - n^2, \quad c := m^2 + mn + n^2 \quad (3)$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$.

Beweis. Im Fall des 120° -Winkels lautet der Cosinussatz $a^2 + b^2 + ab = c^2$ oder

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1.$$

Man erhält also aus jedem 120° -Tripel (a, b, c) eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 + x \cdot y = 1 \quad (4)$$

in rationalen Zahlen: $x = a/c$, $y = b/c$. Umgekehrt ergibt sich aus jeder im ersten Quadranten liegenden Lösung (x, y) von (4) sofort ein ganzzahliges 120° -Tripel, indem

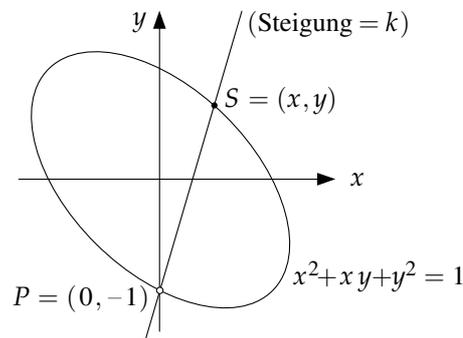


Fig. 2

man die beiden Brüche x und y auf den gemeinsamen Nenner c bringt. Das Problem, die sämtlichen ganzzahligen 120° -Tripel anzugeben, ist damit auf die Bestimmung der rationalen Lösungen der Ellipsengleichung (4) zurückgeführt, und dafür steht wieder die Sekantenmethode zur Verfügung.

Eine spezielle rationale Lösung ist wiederum der Punkt $P := (0, -1)$. Man zieht durch diesen Punkt die Gerade $g: y = kx - 1$ mit der rationalen Steigung $k > 1$ (Fig. 2). Sie trifft die Ellipse in einem zweiten Punkt (x, y) , dessen Koordinaten positiv und rationale Funktionen von k sind. Die Rechnung liefert nämlich

$$x = \frac{2k + 1}{k^2 + k + 1}, \quad y = \frac{k^2 - 1}{k^2 + k + 1}. \quad (5)$$

Ist umgekehrt (x, y) eine im ersten Quadranten gelegene rationale Lösung von (4) und S der zugehörige Ellipsenpunkt, so ist die Steigung k der Geraden durch P und S rational und > 1 , der Punkt (x, y) wird also durch (5) geliefert. Die sämtlichen positiven rationalen Lösungen von (4) sind somit gegeben durch (5) mit $k \in \mathbb{Q}$, $k > 1$.

Mit $k := m/n$, $m > n$, folgt aus (5):

$$\frac{a}{c} = x = \frac{2mn + n^2}{m^2 + mn + n^2}, \quad \frac{b}{c} = y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn + n^2},$$

und daraus ergeben sich genau die angegebenen Tripel. \square

Ein Tripel (a, b, c) mit $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ heisst *primitiv*. Welchen Einschränkungen unterliegen die Variablen m und n , wenn das zugehörige 120° -Tripel (3) primitiv ausfallen soll? Hierfür ist offensichtlich notwendig, dass m und n teilerfremd sind. Umgekehrt gilt:

Lemma 3a Sind m und n teilerfremd und ist $m - n \not\equiv 0 \pmod{3}$, so ist das 120° -Tripel (3) primitiv.

Lemma 3b Sind m' und n' teilerfremd und ist $m' - n' \equiv 0 \pmod{3}$, so haben die zugehörigen Tripel (3) den grössten gemeinsamen Teiler 3, d.h., die Tripel

$$a' := \frac{2m'n' + n'^2}{3}, \quad b' := \frac{m'^2 - n'^2}{3}, \quad c' := \frac{m'^2 + m'n' + n'^2}{3} \quad (6)$$

sind primitiv.

Beweis. Wenn a und b einen gemeinsamen Teiler d haben, so ist wegen $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ auch c durch d teilbar. Sind jedoch a und b teilerfremd, so ist schon $\text{ggT}(a, b, c) = 1$. Es genügt also, die gemeinsamen Teiler von a und b zu betrachten.

Sei $q = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz, die in den beiden Termen $n(2m + n)$ und $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ aufgeht. Dann kann weder m noch n durch p teilbar sein; denn sonst wäre das auch für n bzw. m der Fall, entgegen der Voraussetzung über m und n . Also ist $2m + n$ durch q teilbar, und daraus folgt, dass $m + n$ nicht durch p teilbar ist, denn sonst wäre auch $m = (2m + n) - (m + n)$ durch p teilbar. Somit teilt q die Zahl $m - n$, dann aber auch die Zahl $3m = (2m + n) + (m - n)$, und es folgt $q = p = 3$.

Damit steht fest: Sind m und n teilerfremd und ist $m - n \not\equiv 0 \pmod{3}$, so ist das 120° -Tripel (3) primitiv. Ist jedoch $m - n \equiv 0 \pmod{3}$, so ist auch $2m + n = 3m - (m - n)$ durch 3 teilbar; somit haben dann a und b die Zahl 3 als gemeinsamen Teiler. Wegen $q = 3$ ist das auch der grösste gemeinsame Teiler von a und b . \square

Zum Beispiel erzeugt $m := 4$, $n := 1$ zunächst das Tripel (9, 15, 21), das dann zu dem primitiven Tripel (3, 5, 7) reduziert wird. Dieses letzte Tripel kann nicht direkt aus (3) entstehen, denn die Gleichungen

$$\frac{2m'n' + n'^2}{3} = 2mn + n^2, \quad \frac{m'^2 - n'^2}{3} = m^2 - n^2, \quad \frac{m'^2 + m'n' + n'^2}{3} = m^2 + mn + n^2$$

würden zusammen $m' = \sqrt{3}m$ implizieren. Es scheint also zwei Klassen primitiver 120° -Tripel zu geben: erstens die Klasse T , die die in Lemma 3a beschriebenen Tripel (3) enthält, und zweitens die Klasse T' , die die in Lemma 3b bzw. (6) beschriebenen Tripel (a', b', c') enthält. In Wirklichkeit verhält es sich folgendermassen:

Lemma 3c *Wenn in jedem Tripel der Klasse T die beiden ersten Komponenten vertauscht werden, so entstehen gerade die sämtlichen Tripel der Klasse T' .*

Beweis. Es ist eine bijektive Abbildung von T auf T' anzugeben, die die beiden ersten Tripelkomponenten vertauscht.

Das Paar (m, n) erzeuge vermöge (3) das Tripel $(a, b, c) \in T$. Durch die lineare Transformation

$$m' := m + 2n, \quad n' := m - n \tag{7}$$

ist ihm ein neues Paar (m', n') mit den folgenden Eigenschaften zugeordnet:

1. $m' > n' > 0$.
2. $m' - n' = 3n$; insbesondere ist $m' - n' \equiv 0 \pmod{3}$.
3. Die Zahlen m' und n' sind teilerfremd. Ein gemeinsamer Teiler d von m' und n' müsste nämlich auch ein gemeinsamer Teiler von $3n = m' - n'$ und $3m = m' + 2n'$ sein. Da m und n teilerfremd sind, käme nur $d = 3$ in Frage. Aber $n' = m - n$ ist nach Annahme über m und n nicht durch 3 teilbar.

Folglich entsteht aus diesem Paar (m', n') mit Hilfe von (6) ein Tripel (a', b', c') der Klasse T' . Man rechnet sofort nach, dass es mit dem Tripel

$$(m^2 - n^2, 2mn + n^2, m^2 + mn + n^2) = (b, a, c)$$

übereinstimmt.

Umgekehrt erzeuge das Paar (m', n') vermöge (6) das Tripel $(a', b', c') \in T'$. Dann ist $m' - n' = 0 \pmod{3}$. Durch die zu (7) inverse Transformation

$$m := (m' + 2n')/3, \quad n := (m' - n')/3$$

ist ihm ein Paar (m, n) mit den folgenden Eigenschaften zugeordnet:

1. m und n sind ganzzahlig, und es ist $m > n > 0$.
2. Es ist $m - n \not\equiv 0 \pmod{3}$; denn man hat $m - n = n'$, und n' ist nicht durch 3 teilbar.
3. Die Zahlen m und n sind teilerfremd. Ein gemeinsamer Teiler von m und n wäre nämlich auch ein gemeinsamer Teiler von $m' = m + 2n$ und $n' = m - n$, gegen die Voraussetzung über m' und n' .

Folglich entsteht aus diesem Paar (m, n) mit Hilfe von (3) ein Tripel (a, b, c) der Klasse T . Wiederum kann schnell nachgerechnet werden, dass es mit dem umgeordneten Tripel (b', a', c') übereinstimmt. \square

Damit hat sich herausgestellt, dass die 120° -Tripel der Klasse T und diejenigen der Klasse T' durch „Spiegelung“ auseinander hervorgehen. Es handelt sich also, arithmetisch gesehen, um dieselben Tripel. Ob man sie auch geometrisch als dieselben ansehen will, ist Geschmackssache. Alles in allem haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4 Die sämtlichen primitiven 120° -Zahlentripel sind die Tripel

$$(a, b, c) := (2mn + n^2, m^2 - n^2, m^2 + mn + n^2) \quad (8)$$

mit teilerfremden m und n , $m > n$ und $m - n \not\equiv 0 \pmod{3}$, und deren Spiegelbilder (b, a, c) .

3 60° -Tripel

Im Fall des 60° -Winkels lautet der Cosinussatz $a^2 + b^2 - ab = c^2$ oder

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1.$$

Man erhält also aus jedem 60° -Tripel (a, b, c) eine Lösung der Ellipsengleichung

$$x^2 + y^2 - x \cdot y = 1 \quad (9)$$

(Fig. 3) in rationalen Zahlen: $x = a/c$, $y = b/c$. Umgekehrt ergibt sich aus jeder im ersten Quadranten liegenden Lösung (x, y) von (9) sofort ein ganzzahliges 60° -Tripel, indem man die beiden Brüche x und y auf den gemeinsamen Nenner c bringt.

Zieht man nun wiederum Sekanten durch den Punkt $P := (0, -1)$, so erhält man anstelle von (5) die folgende Parameterdarstellung der im ersten Quadranten liegenden rationalen Lösungen von (9):

$$x = \frac{2k - 1}{k^2 - k + 1}, \quad y = \frac{k^2 - 1}{k^2 - k + 1} \quad (k \in \mathbb{Q}, k > 1).$$

Mit $k := m/n$, $m > n$ ergibt sich nach Erweitern mit n^2 wie im vorangehenden Abschnitt:

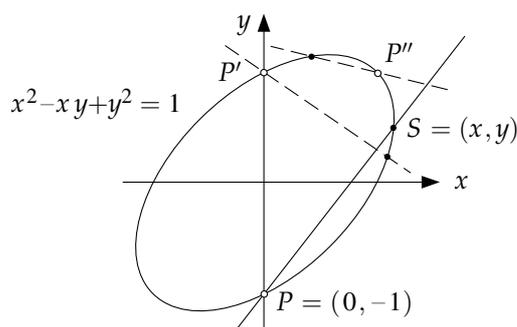


Fig. 3

Satz 5 Jedes 60° -Zahlentripel (a, b, c) ist proportional zu einem Tripel der Form

$$a := 2mn - n^2, \quad b := m^2 - n^2, \quad c := m^2 - mn + n^2 \quad (10)$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$.

Damit verbleibt die Aufgabe, eine vollständige Liste aller primitiven 60° -Tripel herzustellen. Dazu könnten wir, ausgehend von (10), analoge Teilbarkeitsüberlegungen wie im vorangehenden Abschnitt anstellen. Stattdessen wollen wir uns der in Satz 4 beschriebenen Liste der primitiven 120° -Tripel bedienen und überlegen folgendermassen:

Zunächst halten wir fest, dass alle ganzzahligen 120° -Tripel ungleichschenkelig sind, denn das 120° -Tripel $(1, 1, \sqrt{3})$ ist nicht rational. Fig. 4 zeigt, dass sich aus jedem primitiven 120° -Tripel (a, b, c) durch Ansetzen eines gleichseitigen Dreiecks ein primitives 60° -Tripel (a', b', c') bilden lässt, und zwar auf zwei Arten:

$$\phi_1: (a, b, c) \mapsto (a', b', c') := (a + b, b, c), \quad \phi_2: (a, b, c) \mapsto (a', b', c') := (a, a + b, c). \quad (11)$$

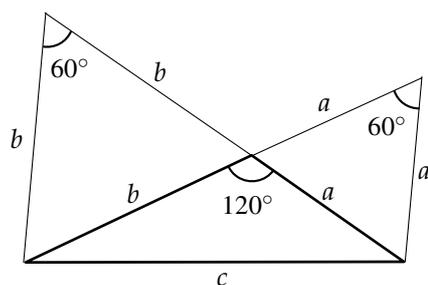


Fig. 4

Dabei gilt jedenfalls $a' \neq b'$. Umgekehrt erhält man aus jedem ungleichschenkeligen primitiven 60° -Tripel (a', b', c') ein primitives 120° -Tripel (a, b, c) durch Abschneiden

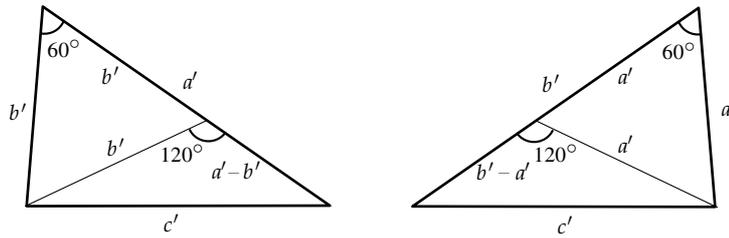


Fig. 5

eines gleichseitigen Dreiecks (Fig. 5):

$$(a', b', c') \mapsto (a, b, c) := \begin{cases} \phi_1^{-1}(a', b', c') = (a' - b', b', c') & (a' > b') \\ \phi_2^{-1}(a', b', c') = (a', b' - a', c') & (a' < b') \end{cases}.$$

Folglich liefert (11) die sämtlichen primitiven 60° -Tripel ausser $(1, 1, 1)$, und zwar jedes genau einmal: Sowohl ϕ_1 wie ϕ_2 ist injektiv; überdies gilt für die ϕ_1 -Tripel $a' > b'$, für die ϕ_2 -Tripel $a' < b'$. Wir notieren noch, dass die Tripel $\phi_2(b, a, c)$ und $\phi_1(a, b, c)$ spiegelbildlich gleich sind. Auf der Grundlage von Satz 4 und (11) können wir damit den folgenden Satz aussprechen:

Satz 6 Die sämtlichen primitiven 60° -Zahlentripel sind die Tripel

$$\begin{aligned} (a', b', c') &:= (m^2 + 2mn, m^2 - n^2, m^2 + mn + n^2), \\ (a', b', c') &:= (2mn + n^2, m^2 + 2mn, m^2 + mn + n^2) \end{aligned} \quad (12)$$

mit teilerfremden m und n , $m > n$ und $m - n \not\equiv 0 \pmod{3}$, deren Spiegelbilder (b', a', c') sowie das Tripel $(1, 1, 1)$.

(Zu den beiden Grundformen (12) wäre man auch gekommen, indem man in Fig. 3 durch $P' := (0, 1)$ Sekanten $x = k(1 - y)$ und durch $P'' := (1, 1)$ Sekanten $x - 1 = k(1 - y)$ mit $k := m/n > 1$ gezogen hätte. Umgekehrt geht z.B. die zweite Grundform (12) durch die Substitution $m := m^* - n^*$, $n := n^*$ in (10) über, womit auch der Anschluss an Satz 5 hergestellt ist.)

4 Ergänzende Bemerkungen

Ähnliche Formen für 120° - und 60° -Tripel lassen sich einem Aufsatz aus dem Jahr 1913 entnehmen. H. Böttcher [2] gewann über einen arithmetischen Ansatz für $\gamma = 120^\circ$ die folgenden Dreiecksgestalten: $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq - p^2$, $c = p^2 - pq + q^2$; dabei ist $2q > p > q$, p und q sind teilerfremd, und $p + q \not\equiv 0 \pmod{3}$. Mit $p := m + n$, $q := m$ ergeben sich die in Satz 4 aufgeführten 120° -Tripel. Bei H. Hasse [4] folgt dieselbe Parameterdarstellung wie die hier gegebene aus Teilbarkeitsüberlegungen im imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Das geschieht in Anlehnung an die besonders elegante Herleitung der Formen pythagoreischer Tripel in $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ unter Ausnutzung der eindeutigen Primfaktorzerlegung Gaußscher Zahlen.

In der folgenden, nach m und n lexikographisch geordneten Tabelle liefert jede Zeile mit (a, b, c) das 120° -Tripel (8) und mit $(a + b, b, c)$ bzw. $(a, a + b, c)$ die beiden 60° -Tripel (12):

m	n	a	$a + b$	b	c
2	1	5	8	3	7
3	1	7	15	8	13
3	2	16	21	5	19
4	3	33	40	7	37
5	1	11	35	24	31
5	3	39	55	16	49
5	4	56	65	9	61
6	1	13	48	35	43
6	5	85	96	11	91
⋮					

Der Autor dankt der Redaktion für ihre Hilfe bei der Drucklegung der vorliegenden Arbeit.

Literatur

- [1] Basmakova, I.G.: *Diophant und diophantische Gleichungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.
- [2] Böttcher, H.: Analoga zu den pythagoreischen Dreiecken. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, Jahrg. 19, No. 7 (1913), 132f.
- [3] Bundschuh, P.: *Einführung in die Zahlentheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg 1996.
- [4] Hasse, H.: Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoreischen Dreiecken. *Elem. Math.* 32 (1977), 1–6.
- [5] Weil, A.: *Zahlentheorie – ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre*. Birkhäuser, Basel 1992.

Albrecht Schultz
 Im Alten Kloster
 D-76857 Eußerthal, Deutschland