
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. Februar 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1197: Zwei Urnen enthalten je k von 1 bis k nummerierte Kugeln. Aus den Urnen zieht man simultan (mit Zurücklegen) je eine Kugel, und zwar so oft, bis die Nummernsumme erstmals grösser oder gleich n ist. Es sei w_n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Summe genau n beträgt. Man bestimme $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1198: Es seien a, b, c und d komplexe Zahlen. Beweise, dass

$$\sqrt{|ab + cd|} \leq \max\{|a|, |b| + |c|, |d|\}.$$

Götz Trenkler, Dortmund, D

Aufgabe 1199 (Die einfache dritte Aufgabe): Beweise, dass von den drei Zahlen eines pythagoreischen Tripels mindestens eine durch 5 teilbar ist.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2002

Aufgabe 1184. Nach einem Orakelspruch sollte die Pest in Griechenland dann zu Ende gehen, wenn der würfelförmige Altar im Apollonheiligtum auf Delos verdoppelt werde. Der Spruch verlangt die (unmögliche) Konstruktion der Kante des neuen Altars mit Zirkel und Lineal. Bei Ausgrabungen auf Delos soll nun aber ein Granitquader, dessen Kanten sich wie $2 : 1 : 1$ verhalten, gefunden worden sein. Damit drängt sich eine neue Deutung des Orakelspruches auf: Ein Quader vom Typus $2 : 1 : 1$ ist so (in Polyeder) zu zerlegen, dass sich aus den Teilen ein Würfel bilden lässt. Gibt es eine solche Zerlegung? Wenn ja, gebe man eine

- leicht zu realisierende Zerlegung für Steinmetze und Puzzelfreunde an.
- Zerlegung mit einer (möglichst) kleinen Anzahl von Stücken an.

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind zwei Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Michael Nüsken (Paderborn, D) und Norbert Hungerbühler (Freiburg, CH). Weil es sich als unmöglich erwiesen hat, auf dem im Aufgabenteil zur Verfügung stehenden Platz eine einsichtige Lösung zu drucken, haben die beiden miteinander Kontakt aufgenommen und werden gemeinsam eine kleine Arbeit schreiben, die später in den Elementen gedruckt wird. Einstweilen begnüge man sich mit den auf der Homepage von Michael Nüsken abrufbaren Maple-Filmen, in welchen eine Acht-Teile-Lösung und eine Sieben-Teile-Lösung präsentiert werden. Die Homepage ist unter <http://www-math.uni-paderborn.de/~nuesken/wrt/delos/> erreichbar.

Aufgabe 1185. Adjungiert man zum Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen die Elemente a mit $a^3 + a + 1 = 0$ und di mit $d^2 = 3a^2 + 4$ und $i^2 = -1$ (in dieser Reihenfolge), so entsteht der Körper $\mathbb{Q}(a, di)$. Bestimme all seine Teilkörper.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es ist nur eine Lösung eingegangen, nämlich von Joachim Klose (Bonn, D). Obwohl Joachim Kloses Überlegungen jenen des Autors ähnlich sind, folgen wir der deutlich kürzeren Lösung des Autors der Aufgabe:

$\mathbb{Q}(a, di)$ ist der Zerfällungskörper des über \mathbb{Q} irreduziblen Polynoms $x^3 + x + 1$. Die Nullstelle $x_1 = a$ liegt nicht in \mathbb{Q} , weil als rationale Lösungen der Gleichung $x^3 + x + 1 = 0$ nur die Teiler ± 1 des x -freien Gliedes in Frage kommen.

Aus der Faktorisierung $x^3 + x + 1 = (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2 + 1)$ entnimmt man die weiteren Nullstellen $x_2 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3a^2+4}}{2} \cdot i = -\frac{a}{2} + \frac{di}{2}$ und $x_3 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3a^2+4}}{2} \cdot i = -\frac{a}{2} - \frac{di}{2}$. Es ist noch zu zeigen, dass $d \notin \mathbb{Q}$. Aus $d^2 = 3a^2 + 4 = \frac{p^2}{q^2}$ mit $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ folgte durch Multiplikation mit a die Beziehung $3a^3 + 4a = (-3a - 3) + 4a = a - 3 = \frac{p^2 \cdot a}{q^2}$ oder $a = \frac{3q^2}{q^2 - p^2} \in \mathbb{Q}$, also ein Widerspruch zu $a \notin \mathbb{Q}$.

Der Körper $\mathbb{Q}(a, di)$ besitzt also, als Vektorraum über \mathbb{Q} betrachtet, die Basis $1, a, a^2, di, adi, a^2di$ und ist somit eine Körpererweiterung von \mathbb{Q} vom Grad sechs:

$$\mathbb{Q}(a, di) = \{r_1 + r_2 \cdot a + r_3 \cdot a^2 + r_4 \cdot di + r_5 \cdot adi + r_6 \cdot a^2di\} \quad \text{mit} \quad r_1, r_2, \dots, r_6 \in \mathbb{Q}.$$

Die Galoisgruppe des Polynoms $x^3 + x + 1$ (das sind die Körperautomorphismen des Körpers $\mathbb{Q}(a, di)$, welche den Grundkörper \mathbb{Q} fest lassen) besteht aus der vollen symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_3 = \{\epsilon, \rho, \sigma, \tau, \nu, \omega\}$, welche mit

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} & \rho &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} & \sigma &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ \tau &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} & \nu &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} & \omega &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (\nu^{-1}) \end{aligned}$$

die Nullstellen von $x^3 + x + 1$ permutiert.

Die Teilmengen von $\mathbb{Q}(a, di)$, welche bei den Automorphismen einer Untergruppe von \mathbb{S}_3 fest bleiben, sind nach dem Hauptsatz der Galoistheorie genau die Teilkörper von

$\mathbb{Q}(a, di)$, wobei die Inklusion der Untergruppen und der Teilkörper gerade umgekehrt wird. Weil \mathbb{S}_3 sechs Untergruppen besitzt, gibt es sechs Teilkörper:

1. Als erste Untergruppe von \mathbb{S}_3 hat man die triviale Untergruppe $\{\epsilon\}$, welche den ganzen Körper $\mathbb{Q}(a, di)$ fest lässt.
2. Die Untergruppe $\{\epsilon, \rho\}$ lässt wegen $\rho(a) = a$ und $\rho(id) = -id$ genau den Teilkörper $\mathbb{Q}(a)$ fest.
3. Die Ermittlung des Fixkörpers der Automorphismen der Untergruppe $\{\epsilon, \sigma\}$ bedarf einigen Rechenaufwandes. Wir überlegen, welches unter σ die Bilder der sechs Basiselemente sind:

- $\sigma(1) = 1$
- $\sigma(a) = \sigma(x_1) = x_3 = -\frac{a}{2} - \frac{di}{2}$
- $\sigma(a^2) = (\sigma(a))^2 = \left(-\frac{a}{2} - \frac{di}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - (3a^2 + 4)}{4} + \frac{adi}{2} = -\frac{a^2}{2} - 1 + \frac{adi}{2}$
- $\sigma(di) = 2\sigma\left(-\frac{a}{2} + \frac{di}{2}\right) + \sigma(a) = 2\sigma(x_2) + \sigma(x_1) = 2x_2 + x_3 = -\frac{3a}{2} + \frac{di}{2}$
- $\sigma(adi) = \sigma(a)\sigma(di) = \frac{3a^2}{2} + 1 + \frac{adi}{2}$
- $\sigma(a^2 di) = \sigma(a^2)\sigma(di) = \frac{a}{2} - \frac{di}{2} - a^2 di$

Das allgemeine Element $r_1 + r_2 \cdot a + r_3 \cdot a^2 + r_4 \cdot di + r_5 \cdot adi + r_6 \cdot a^2 di$ wird durch σ auf $r_1 + r_2 \cdot \left(-\frac{a}{2} - \frac{di}{2}\right) + r_3 \cdot \left(-\frac{a^2}{2} - 1 + \frac{adi}{2}\right) + r_4 \cdot \left(-\frac{3a}{2} + \frac{di}{2}\right) + r_5 \cdot \left(\frac{3a^2}{2} + 1 + \frac{adi}{2}\right) + r_6 \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{di}{2} - a^2 di\right)$ abgebildet. Ein Koeffizientenvergleich liefert als Bedingung für das Festbleiben dieses Elements $r_4 = -r_2$, $r_5 = r_3$ und $r_6 = 0$. Somit ist der zur Untergruppe $\{\epsilon, \sigma\}$ gehörige Teilkörper durch $\mathbb{K}_\sigma = \{r_1 + r_2 a + r_3 a^2 - r_2 di + r_3 adi\}$ gegeben.

4. In genau gleicher Weise gewinnt man den zur Untergruppe $\{\epsilon, \tau\}$ gehörigen Teilkörper $\mathbb{K}_\tau = \{r_1 + r_2 a + r_3 a^2 + r_2 di - r_3 adi\}$; er ist zu \mathbb{K}_σ isomorph.
5. Die letzte echte Untergruppe von \mathbb{S}_3 ist die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_3 = \{\epsilon, \nu, \nu^2\} = \{\epsilon, \omega, \omega^2\}$. Berücksichtigt man, dass $\nu = \sigma \cdot \rho$, lässt sich wie oben leicht das Bild eines allgemeinen Elementes berechnen; der anschließende Koeffizientenvergleich führt zu $r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $r_5 = 0$ und $r_6 = 3r_4$ und liefert den Teilkörper $\mathbb{K}_\nu = \mathbb{K}_\omega = \{r_1 + r_4 di + 3r_4 a^2 di\}$.
6. Zur vollen Galoisgruppe \mathbb{S}_3 gehört der Teilkörper $\mathbb{Q} = \{r_1\}$.

*Joachim Klos*es Vorgehen ist in einem gewissen Sinne symmetrischer. Er erkennt in seinen Überlegungen den Teilkörper \mathbb{K}_ν als den quadratischen Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3I})$ von \mathbb{Q} ; die drei Körper \mathbb{K}_ρ , \mathbb{K}_σ und \mathbb{K}_τ erhält er als die kubischen Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(x_1)$, $\mathbb{Q}(x_2)$ und $\mathbb{Q}(x_3)$; der benötigte Rechenaufwand ist aber gross.

Aufgabe 1186 (Die einfache dritte Aufgabe). In einem konvexen Achteck mit lauter gleichen Innenwinkeln haben alle Seiten rationale Längen. Zeige, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Oleg Faynsteyn, Leipzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Gheorge Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), André Calame (Sauges, CH),

Con Amore Problem Group (Copenhagen, DK), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Hansklaus Rummler (Freiburg, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Alle Löser folgen der Idee der abgedruckten Lösung von *Jany C. Binz*, wobei aber meistens nicht die komplexe Ebene unterlegt wird: Die rationalen Seitenlängen seien s_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 8$). Mit Hilfe der achten Einheitswurzel $c = \exp(\frac{i\pi}{4})$ geben wir die

Eckpunkte durch $a_0 = 0$, $a_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} s_n c^{n-1}$ ($\ell = 1, 2, \dots, 7$) vor. Damit das gewünschte Achteck entsteht, muss $a_8 = a_0$ gelten:

$$s_1 + s_2c + s_3i + s_4c^3 - s_5 - s_6c - s_7i - s_8c^3 = 0.$$

Trennen von Real- und Imaginärteil führt auf

$$s_1 - s_5 + \frac{(s_2 - s_6) - (s_4 - s_8)}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{und} \quad s_3 - s_7 + \frac{(s_2 - s_6) + (s_4 - s_8)}{\sqrt{2}} = 0.$$

Wegen der Rationalität der s_ℓ ergeben sich die Gleichungen

$$s_1 = s_5, \quad s_3 = s_7, \quad (s_2 - s_6) - (s_4 - s_8) = 0, \quad (s_2 - s_6) + (s_4 - s_8) = 0.$$

Addieren resp. Subtrahieren der letzten beiden Gleichungen liefert $s_2 = s_6$ und $s_4 = s_8$.

Korrigendum: Die Aufgaben 1182 und 1183 wurden auch von Johannes Ebersold (St. Gallen, CH) gelöst.