Elem. Math. 58 (2003) 177 – 180
0013-6018/03/040177-4
DOI 10.1007/s00017-004-1200-1

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. Mai 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1200: Eine „Ulam-Folge" ist wie folgt rekursiv definiert: Die natürlichen Zahlen u_1, u_2 mit $u_1 < u_2$ sind gegeben. Für $n \geq 3$ ist u_n die kleinste natürliche Zahl, die grösser als u_{n-1} ist und die genau eine Darstellung $u_n = u_k + u_\ell$ mit $0 < k < \ell < n$ besitzt. Es bezeichne nun x_N die Anzahl Glieder der Ulam-Folge, die $\leq N$ sind.

Beweise: $\limsup\limits_{N\to\infty} \dfrac{x_N}{N} \leq \dfrac{1}{2}$.

Matthias Müller, Bad Saulgau, D

Aufgabe 1201: Es sei $1 \leq a < b$. Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right)^a < \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)\right)^b \quad \text{für} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)\right)^a > \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{b}}\right)\right)^b \quad \text{für genügend kleine positive } x\,.$$

Mihály Bencze, Sacele, RO

Aufgabe 1202 (Die einfache dritte Aufgabe): Man faltet ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen a, b $(a < b)$ entlang einer Diagonalen. In welchem Verhältnis teilt die (gedrehte) Seite b ihre (ursprüngliche) Gegenseite?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2002

Aufgabe 1187. Es sei n die grösste Zahl der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m < 2002 \ \wedge \ 5 \nmid \binom{2m}{m}\}$. Welchen Rest lässt $\binom{2n}{n}$ bei der Division durch 5?

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die folgende Lösung ist zusammengesetzt aus Überlegungen von *Peter Bundschuh, Albert Stadler* und *Jany C. Binz*:

Die Anzahl der Faktoren 5 in der Primfaktorzerlegung von $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$ beträgt

$$s = \underbrace{\sum_{i \geq 1} \left[\frac{2m}{5^i}\right]}_{s_1} - 2 \cdot \underbrace{\sum_{i \geq 1} \left[\frac{m}{5^i}\right]}_{s_2} .$$

$\binom{2m}{m}$ ist also genau dann nicht durch 5 teilbar, wenn $s = 0$ gilt.

Stellt man die Zahl m im Fünfersystem dar – wegen $m < 2002$ kommen höchstens fünfstellige Zahlen in Frage – so darf beim Übergang von m zu $2m$ kein Stellenübertrag vorkommen, weil sich dadurch die Summe s_1 ändert, s_2 aber gleich bleibt. Das ist gleichbedeutend damit, dass in der Darstellung der Zahl $2m$ nur die Ziffern 0, 2 und 4 auftreten. Die grösstmögliche Zahl für $2m$ ist $(44444)_5$, also $2m = 3124$ und $m = 1562$.

Um den Fünferrest von $\binom{3124}{1562}$ zu bestimmen, benützen wir die Identitäten

$$(5\ell + 1) \cdot (5\ell + 2) \cdot (5\ell + 3) \cdot (5\ell + 4) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \equiv -1 \pmod 5 ,$$
$$((5\ell + 1) \cdot (5\ell + 2))^2 \equiv -1 \pmod 5 .$$

Mit ihrer Hilfe lässt sich die Reduktionsformel

$$\binom{10\ell + 4}{5\ell + 2} \equiv \binom{10\ell}{5\ell} \equiv \binom{2\ell}{\ell} \pmod 5$$

beweisen, welche mehrfach angewendet

$$\binom{3124}{1562} \equiv \binom{624}{312} \equiv \binom{124}{62} \equiv \binom{24}{12} \equiv \binom{4}{2} \equiv 1 \pmod 5$$

den gesuchten Fünferrest 1 liefert.

Aufgabe 1188. Wir betrachten jene Vierflache (mit nicht verschwindendem Volumen), bei welchen die Summe der Abstände zu den vier Seitenflächen für alle inneren Punkte gleich gross ist. Beweise, dass genau die Tetraeder mit lauter zueinander kongruenten Seitenflächen mit spitzen Winkeln diese Eigenschaft haben und dass gegenüberliegende Kanten gleich lang sind.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Zuschriften eingegangen, nämlich von Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Harald Merk (Biberach, D).

Wir folgen den Überlegungen von *Harald Merk*: Es sei P ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$. Weil die Funktion, welche die Abstandssumme beschreibt, einerseits stetig in den Koordinaten von P, anderseits aber konstant ist, erhält man den Wert h der Konstanten als Abstand einer Ecke zur gegenüberliegenden Fläche. Man schliesst, dass alle vier Körperhöhen gleich sind, und mit der Volumenformel $V = Gh/3$ folgt, dass die vier Seitenflächen denselben Inhalt haben. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass im Dreieck ABC die Winkel bei A und B spitz sind, so können wir dem Tetraeder ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie folgt anpassen:

$$A = (-a, 0, 0), \quad B = (b, 0, 0), \quad C = (0, c, 0), \quad D = (x, y, z),$$

wobei $a, b, c, z > 0$ sein sollen. Berechnet man die Flächeninhalte der vier Seitenflächen und verlangt, dass alle gleich gross sind, wird man auf ein Gleichungssystem mit sechs Gleichungen geführt. Das System besitzt für (x, y, z) nur eine Lösung, bei welcher z positiv sein kann, nämlich

$$(x, y, z) = \left(b - a,\ \frac{c^2 - 2ab}{c},\ \frac{2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c^2 - ab}}{c} \right).$$

Damit $z > 0$ ist, muss $c^2 > ab$ gelten; das bedeutet aber gerade, dass auch der dritte Winkel im Dreieck ABC spitz ist. Berechnet man nun mit diesen Eckpunktkoordinaten die sechs Kantenlängen, so ergibt sich

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a + b, \quad \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2},$$

und in der einen Richtung ist somit der Beweis geführt.

Es sei nun P ein innerer Punkt eines Vierflachs, dessen Seitenflächen alle den Inhalt G haben, und h_1, h_2, h_3 und h_4 seien die Abstände von P zu den Seitenflächen. Für das Volumen V des Vierflachs ergibt sich $V = Gh_1/3 + Gh_2/3 + Gh_3/3 + Gh_4/3$, woraus

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3 \cdot V}{G} = \text{const}$$

folgt.

Johannes Ebersold weist darauf hin, dass eine Lösung des Problems sich in „Altshiller-Court, Modern Pure Solid Geometry, Chelsea Publishing Company, New York“ findet, und *Walther Janous* hat einen Beitrag in „Honsberger, Mathematische Juwelen, Vieweg & Sohn, Braunschweig“ gefunden.

Aufgabe 1189 (Die einfache dritte Aufgabe). Bestimme x aus der Gleichung

$$19[x] + 99\{x\} = 1999.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die Gaußklammer, und $\{x\}$ ist der Nachkommaanteil von x.

Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 19 Zuschriften eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Ovidiu Furdui (Kalamazoo, USA), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Hansjürg Lädrach (Aarwangen, CH), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Jürgen Spilker setzt $n := 105 - [x]$ und überführt damit die gegebene Gleichung in $99\{x\} - 4 = 19n$. Wegen $0 \leq 99\{x\} < 99$ muss $0 \leq n \leq 4$ gelten. Zu einem ganzen n gehört $x_n := (105-n) + \frac{19n+4}{99}$. Also sind höchstens die Zahlen $x_0 = 105\frac{4}{99}$, $x_1 = 104\frac{23}{99}$, $x_2 = 103\frac{42}{99}$, $x_3 = 102\frac{61}{99}$ und $x_4 = 101\frac{80}{99}$ Lösungen, und dass sie es wirklich sind, bestätigt man durch Einsetzen.

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*