Elem. Math. 59 (2004) 174 – 177
0013-6018/04/040174-4
DOI 10.1007/s00017-004-1212-5

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. Mai 2005 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1212: Es bezeichnen a, b, c die Seitenlängen, r und ϱ die Längen von Um- und Inkreisradius eines Dreiecks. Zudem sei $T = 2(r - 2\varrho)\sqrt{r(r - 2\varrho)}$. In [1] gab Blundon als schärfste Abschätzung für $a^2 + b^2 + c^2$ die Ungleichung

$$\lambda_1 r^2 + \lambda_2 \varrho r + \lambda_3 \varrho^2 - \lambda_4 T \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \lambda_1 r^2 + \lambda_2 \varrho r + \lambda_3 \varrho^2 + \lambda_4 T$$

mit $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = -3$ und $\lambda_4 = 2$. Diese seither oft zitierte Ungleichung ist falsch, was man schnell einsieht, wenn man ein gleichseitiges Dreieck betrachtet. Welches sind die korrekten Werte für λ_1, λ_2, λ_3, λ_4?

Peter Nüesch, Lausanne, CH

[1] Blundon, W.J.: Inequalities Associated with the Triangle. *Canad. Math. Bull.* 8 (1965), 615–626.

Aufgabe 1213: Es bezeichne S_n die Menge der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jeder Permutation $\sigma \in S_n$ ordnen wir die Zahl

$$d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(i+1) - \sigma(i))^2$$

zu. Man berechne $a_n = \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1214 (Die einfache dritte Aufgabe): Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ nichtverschwindende Zahlen. Zeige, dass die beiden Ausdrücke

$$\sum_{j=1}^{n-1} (a_n a_{j+1}(a_1 - 1) - a_1 a_j (a_n - 1)) \cdot \frac{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}{a_j a_{j+1}}$$

und

$$(a_n - a_1)\left(\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell - \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}{a_j}\right)$$

übereinstimmen.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2003

Aufgabe 1200. Eine „Ulam-Folge" ist wie folgt rekursiv definiert: Die natürlichen Zahlen u_1, u_2 mit $u_1 < u_2$ sind gegeben. Für $n \geq 3$ ist u_n die kleinste natürliche Zahl, die größer als u_{n-1} ist und die genau eine Darstellung $u_n = u_k + u_\ell$ mit $0 < k < \ell < n$ besitzt. Es bezeichne nun x_N die Anzahl Glieder der Ulam-Folge, die $\leq N$ sind.

Beweise: $\limsup\limits_{N\to\infty} \dfrac{x_N}{N} \leq \dfrac{1}{2}$.

Matthias Müller, Bad Saulgau, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Lösungen eingetroffen, nämlich von Stefan Grieder (Zürich, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH) und Harald Merk (Biberach, D).

Wir folgen der von der Redaktion bearbeiteten Lösung von *Peter Hohler:*

Wir zeigen, dass – für jedes N – unter den ersten $2N$ natürlichen Zahlen höchstens $N+2$ einer Ulam-Folge angehören können. Daraus folgt dann die Behauptung.

Wir führen den Beweis induktiv. Für kleine N ist dies sofort nachzuprüfen. Wir setzen nun voraus, dass es in der Menge $\mathbb{N}_{2N} = \{1, 2, \ldots, 2N\}$ höchstens $N + 2$ Zahlen gibt, die zur Ulam-Folge U gehören und zeigen, dass dann höchstens $N+3$ Zahlen der Menge $\mathbb{N}_{2N+2} = \{1, 2, \ldots, 2N + 2\}$ zu U gehören können.

- Ist die Anzahl der zu $\mathbb{N}_{2N}$ gehörenden Folgenglieder $\leq N + 1$, so liegen höchstens $N + 3$ Folgenglieder in der um zwei Elemente mächtigeren Menge $\mathbb{N}_{2N+2}$.

- Beträgt die Anzahl der zu $\mathbb{N}_{2N}$ gehörenden Folgenglieder $N + 2$, betrachten wir die N disjunkten Zweiermengen $\{1, 2N\}$, $\{2, 2N - 1\}$, $\{3, 2N - 2\}$, …, $\{N, N + 1\}$. Nach dem Schubfachprinzip muss es unter ihnen mindestens zwei geben, bei denen beide Elemente U angehören. Da die Summe der beiden Elemente in jedem Fall $2N + 1$ beträgt, kann die Zahl $2N + 1$ wegen der geforderten Eindeutigkeit der Darstellung der Folge U nicht angehören. Von den beiden Zahlen $2N + 1$ und $2N + 2$ kann also höchstens $2N + 2$ zu U gehören, so dass also auch in diesem Fall höchstens $N + 3$ Zahlen aus $\mathbb{N}_{2N+2}$ der Ulam-Folge angehören.

Aufgabe 1201. Es sei $1 \leq a < b$. Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right)^a < \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)\right)^b \quad \text{für} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$
$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)\right)^a > \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{b}}\right)\right)^b \quad \text{für genügend kleine positive } x.$$

Mihály Bencze, Sacele, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingegangen, nämlich von Gheorghe Bercea (München, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH) und Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Stefan Grieder*: Es seien

$$f(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)^y \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)\right)^y.$$

Die beiden Ungleichungen sind gleichwertig damit, dass f als Funktion der Variablen y für $y \geq 1$ und $0 < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton wachsend und g als Funktion der Variablen y für $y \geq 1$ und für genügend kleine x streng monoton fallend ist. Deshalb genügt es zu zeigen, dass die partielle Ableitung nach y im ersten Fall positiv und im zweiten Fall negativ ist.

Ableiten ergibt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)^y \cdot \left(\ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)\right)^y \cdot \left(\ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)\right) + \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)\right).$$

Weil der erste Faktor der Ableitungen für den Bereich $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $y \geq 1$ positiv ist, genügt es zu zeigen, dass der zweite Faktor im ersten Fall positiv ist und im zweiten Fall für genügend kleine x negativ ist.

Es sei also

$$\tilde{f}(z) = \ln(\cos(z)) + \frac{1}{2} z \tan(z),$$
$$\tilde{g}(z) = \ln(\cos(z)) + \frac{1}{3} z \tan(z).$$

Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{f}(z) > 0$ für $0 < z < \frac{\pi}{2}$ und $\tilde{g}(z) < 0$ für genügend kleine positive z. Dazu berechnen wir wiederum die Ableitungen:

$$\tilde{f}'(z) = \frac{2z - \sin(2z)}{4\cos^2(z)}, \qquad \tilde{g}'(z) = \frac{z - \sin(2z)}{3\cos^2(z)}.$$

Aus der für positive t geltenden Ungleichung $\sin(t) < t$ folgt $2z - \sin(2z) > 0$ für positive z. Also gilt $\tilde{f}'(z) > 0$ für $0 < z < \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt wegen $\tilde{f}(0) = 0$ wiederum, dass $\tilde{f}(z) > 0$ für $0 < z < \frac{\pi}{2}$, was die erste Ungleichung beweist.

Für kleine positive t gilt die Ungleichung $\sin(t) > \frac{t}{2}$ und damit $z - \sin(2z) < 0$ für genügend kleine positive z. Entsprechend ist $\tilde{g}'(z) < 0$. Daraus folgt wegen $\tilde{g}(0) = 0$ wiederum, dass $\tilde{g}(z) < 0$ für genügend kleine positive z, was die zweite Ungleichung beweist.

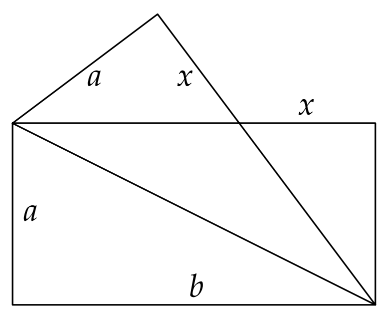
Aufgabe 1202 (Die einfache dritte Aufgabe). Man faltet ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen a, b $(a < b)$ entlang einer Diagonalen. In welchem Verhältnis teilt die (gedrehte) Seite b ihre (ursprüngliche) Gegenseite?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingegangen:

Lutz Andrews (Röthenbach, D), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH), Alfred Höhn (Basel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Otto M. Keiser (Zürich, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Wilfried Pigulla (Passau, D), Hansklaus Rummler (Freiburg, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Daniel Steiner (Langenthal, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löserinnen und Löser argumentieren wie *Walther Janous*:



Aus dem ausserhalb des Rechtecks liegenden rechtwinkligen Dreieck erhält man

$$x^2 + a^2 = (b - x)^2, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Deshalb gilt für das gesuchte Teilverhältnis

$$\frac{x}{b - x} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Bemerkenswert ist, dass bei den in Europa üblichen Papierformaten nach DIN, bei welchen $b/a = \sqrt{2}$ ist, dieses Teilverhältnis $1 : 3$ beträgt.