
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. Februar 2005 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1209: Es seien ω_1, ω_2 von 0 verschiedene reelle Zahlen mit irrationalem Quotienten ω_1/ω_2 .

Beweis: Zu jedem $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ gibt es eine Folge $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ reeller Zahlen derart, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_1 \cdot \lambda_n) = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_2 \cdot \lambda_n) = y$.

Harald Merk, Biberach, D

Aufgabe 1210: Wir betrachten normierte selbstreziproke Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad n :

$$p(z) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell, \quad a_n = 1, \quad a_{n-\ell} = a_\ell \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Bestimme jene Polynome p , welche der Funktionalgleichung

$$p(1+z) + p(1-z) = p(z) + p(-z)$$

genügen und bei denen keine Nullstelle mit einer Nullstelle des selbstreziproken Polynoms $q(z) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + z^3 + z^2 - \frac{5}{2}z + 1$ übereinstimmt.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1211 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Quersumme einer Dezimalzahl ≥ 10 ist kleiner als diese Zahl. Beweise ein analoges Resultat für die höheren Potenzen: Es

sei $k > 1$. Für die Zahl n mit der Dezimaldarstellung $n = \sum_{\ell=0}^N z_\ell \cdot 10^\ell$ definiert man die

verallgemeinerte Quersumme $q_n^{(k)} := \sum_{\ell=0}^N z_\ell^k$. Beweise, dass $q_n^{(k)} < n$ für $n \geq (k-1) \cdot 10^k$.

Wie lässt sich die Aussage verallgemeinern, wenn man die Zifferndarstellung zu einer beliebigen Basis $g \geq 2$ verwendet?

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2003

Aufgabe 1197. Zwei Urnen enthalten je k von 1 bis k nummerierte Kugeln. Aus den Urnen zieht man simultan (mit Zurücklegen) je eine Kugel, und zwar so oft, bis die Nummernsumme erstmals grösser oder gleich n ist. Es sei w_n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Summe genau n beträgt.

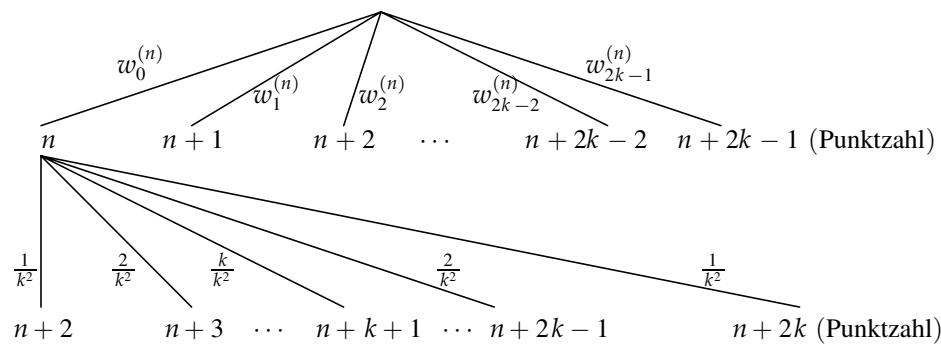
Man bestimme $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind fünf Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Stefan Grieder (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Albert Stadler (Zürich, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der Lösung von *Stefan Grieder*: Es bezeichne $w_j^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummernsumme $n + j$ ist, wenn sie erstmals grösser oder gleich n ist. Im Folgenden geben wir eine Rekursion für $w_j^{(n)}$ an.

Wenn wir mit der Wahrscheinlichkeit $w_0^{(n)}$ die Summe n erreichen – wenn sie erstmals grösser oder gleich n ist – so müssen wir nochmals je eine Kugel aus den Urnen ziehen, um mindestens $n + 1$ Punkte zu erzielen. Wir erhalten damit den folgenden Wahrscheinlichkeitsbaum:



Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $w_j^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned}
 w_0^{(n+1)} &= w_1^{(n)} \\
 w_1^{(n+1)} &= \frac{1}{k^2} w_0^{(n)} + w_2^{(n)} \\
 w_2^{(n+1)} &= \frac{2}{k^2} w_0^{(n)} + w_3^{(n)} \\
 &\vdots \\
 w_k^{(n+1)} &= \frac{k}{k^2} w_0^{(n)} + w_{k+1}^{(n)} \\
 &\vdots \\
 w_{2k-2}^{(n+1)} &= \frac{2}{k^2} w_0^{(n)} + w_{2k-1}^{(n)} \\
 w_{2k-1}^{(n+1)} &= \frac{1}{k^2} w_0^{(n)}
 \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise lässt sich die Rekursion wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} w_0^{(n+1)} \\ w_1^{(n+1)} \\ w_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ w_{2k-2}^{(n+1)} \\ w_{2k-1}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{k^2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{k^2} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} w_0^{(n)} \\ w_1^{(n)} \\ w_2^{(n)} \\ \vdots \\ w_{2k-2}^{(n)} \\ w_{2k-1}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Der Anfangsvektor ist gegeben durch

$$\left(w_0^{(0)}, w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_{2k-1}^{(0)} \right)^T = (1, 0, 0, \dots, 0)^T.$$

Die dabei auftretende Matrix A ist stochastisch im Sinne, dass sie aus nichtnegativen Einträgen besteht und die Summe in jeder Spalte 1 beträgt. Die Einträge 1 unmittelbar über der Hauptdiagonalen haben den Effekt, dass die $(j+1)$ -te Spalte von A^{n+1} der j -ten Spalte von A^n entspricht. Daraus folgt, dass es sich für $k > 1$ um eine quasipositive stochastische Matrix handelt. Aus der Theorie der stochastischen Matrizen folgt, dass für $k > 1$ die Grenzmatrix $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ und damit auch die Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} w_j^{(n)} =: w_j$ existieren.

Für die Grenzwerte w_j ergibt sich aus den Rekursionsgleichungen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} w_0 & = w_1 \\ w_1 & = \frac{1}{k^2} w_0 + w_2 \\ w_2 & = \frac{2}{k^2} w_0 + w_3 \\ & = \vdots \\ w_k & = \frac{k}{k^2} w_0 + w_{k+1} \\ & = \vdots \\ w_{2k-2} & = \frac{2}{k^2} w_0 + w_{2k-1} \\ w_{2k-1} & = \frac{1}{k^2} w_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{und daraus durch} \\ \text{Rückwärtseinsetzen} \\ \text{beginnend mit} \\ \text{der letzten Zeile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} w_0 & = w_1 \\ w_1 & = \frac{1}{k^2} w_0 \\ w_2 & = \frac{k^2-1}{k^2} w_0 \\ & = \vdots \\ w_k & = \frac{k(k+1)}{k^2} w_0 \\ & = \vdots \\ w_{2k-2} & = \frac{3}{k^2} w_0 \\ w_{2k-1} & = \frac{1}{k^2} w_0 \end{array}$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist auch im Grenzwert $w_0 + \dots + w_{2k-1} = 1$. Durch Summieren aller Gleichungen des Systems erhält man also links 1. Wenn man rechts die dritte Gleichung mit der letzten, die vierte mit der vorletzten usw. verrechnet, erhält man jedesmal w_0 , insgesamt also $(k+1)w_0$. Daraus ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit für $k > 1$

$$w_0 = \frac{1}{k+1}.$$

Für $k = 1$ existiert der Grenzwert nicht.

Aufgabe 1198. Es seien a , b , c und d komplexe Zahlen. Beweise, dass

$$|\sqrt{ab + cd}| \leq \max\{|a|, |b| + |c|, |d|\}.$$

Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 21 Lösungen eingegangen, nämlich von Ladislav Beran (Prag, CZ), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Mihai Cipu (Bukarest, RO), Ovidiu Furdui (Kalamazoo, USA), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hongkong, CN), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser argumentieren wie *Joachim Klose*: Es sei $|a| \leq |d|$. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sqrt{|ab + cd|} &\leq \sqrt{|ab| + |cd|} \\ &= \sqrt{|a||b| + |c||d|} \leq \sqrt{(|b| + |c|)|d|} \\ &\leq \sqrt{(\max\{|b| + |c|, |d|\})^2} = \max\{|b| + |c|, |d|\} \\ &= \max\{|a|, |b| + |c|, |d|\}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung nochmals $|a| \leq |d|$ benutzt wurde. Den Fall $|d| \leq |a|$ behandelt man analog.

Aufgabe 1199 (Die einfache dritte Aufgabe). Beweise, dass von den drei Zahlen eines pythagoreischen Tripels mindestens eine durch 5 teilbar ist.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Rudolf Cruse (Graben-Neudorf, D), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Andrews Lutz (Röthenbach, D), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Löserin und die meisten Löser gehen aus von der bekannten Parametrisierung $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, welche für primitive pythagoreische Tripel mit geradem a

gilt und machen anschliessend Fallunterscheidungen. *Jürgen Spilker* argumentiert kürzer: Für jede ganze Zahl z gilt

$$z^2 \equiv \begin{cases} \pm 1 \pmod{5}, & \text{falls } z \text{ nicht durch } 5 \text{ teilbar,} \\ 0 \pmod{5}, & \text{falls } z \text{ durch } 5 \text{ teilbar.} \end{cases}$$

Es ist offensichtlich nicht möglich, in der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ alle drei Positionen mit ± 1 zu belegen; mindestens eine Position muss 0 sein, also ist mindestens eine Zahl des Tripels durch 5 teilbar.

Hans Heiner Storrer und *Jany C. Binz* machen darauf aufmerksam, dass sich in W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, Warschau, 1964, ein Beweis findet, der ebenfalls die oben genannte Parametrisierung benutzt.

Nachtrag: In der Löserliste von Aufgabe 1194 (Heft 2) ist Harald Merk (Biberach, D) vergessen gegangen. Er hat ebenfalls eine korrekte Lösung eingesandt.