Elem. Math. 59 (2004) 178 – 180
0013-6018/04/040178-3
DOI 10.1007/s00017-002-1024-4

Elemente der Mathematik

Bücher und Computersoftware

F. Sauvageot: Petits problèmes de géométries et d'algèbre. xii + 172 pages, sFr. 45.50. Springer, Berlin, Heidelberg 2000; ISBN 3-540-65986-2.

Les problèmes discutés dans cet ouvrage sont issus de concours d'entrée à l'Ecole normale supérieure de Cachan, dans la banlieue sud de Paris, qui abrite le Centre national de l'enseignement technique. C'est dire que son contenu concerne avant tout les étudiants et les enseignants des classes préparatoires aux grandes écoles françaises, voire les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques.

Néanmoins, la conception que l'auteur se fait de l'examen oral d'admission imprègne tout le livre et en fait un document d'une portée bien plus générale: *(...) Ce dialogue, permettant de tester les connaissances du candidat et son sens mathématique, est au moins aussi important que la pure résolution du problème proposé. En d'autres termes, nous nous sommes plutôt attachés aux idées qu'à la technique. Il ne s'agit donc ni d'un livre d'exercices, ni d'un livre de cours, mais plutôt d'un manuel pour* **apprendre des mathématiques**.

L'épithète *petits* du titre est manifestement trompeur. L'auteur, qui a certainement le sens de l'humour, le reconnaît bien: *Le plus souvent les questions posées sont subtiles et n'appellent pas une réponse immédiate. (Elles) ont dans les faits servi de base à une discussion entre le candidat et l'interrogateur. (...) Les questions posées ne demandent pas de longs développements calculatoires, elles privilégient l'intuition géométrique et la réflexion.* C'est ce point de vue qui rend la consultation de ce livre particulièrement fructueuse. Du moins pour le lecteur disposant d'un bon bagage et qui ne craint pas de s'accrocher!

Le chapitre 1 énonce les 29 *petits* problèmes, répartis en:

- Egalités – méthodes algébriques
- Egalités – méthodes transcendantes
- Invariants et autres caractérisations
- Problèmes de densité
- Géométrie du *continu*
- Algèbre linéaire, quadratique et multilinéaire.

Le chapitre 5 réunit de brèves indications pour chacun de ces problèmes, alors que le chapitre 3 rassemble leurs solutions développées. Celles-ci sont suivies de commentaires sur l'exercice considéré, *le situant dans un cadre plus général, procurant des ouvertures à propos des thèmes rencontrés et renvoyant parfois à la bibliographie*. Ainsi conçus et discutés, ces problèmes constituent de véritables pistes de réflexion.

Le chapitre 2 énonce *le sujet de l'épreuve commune aux concours des Ecoles normales supérieures de la rue d'Ulm et de Cachan – Année 1995*. Ce texte comprend déjà plus de 8 pages! La solution en est donnée dans les 21 pages du chapitre 4.

Il est évidemment impossible de résumer un tel recueil; quelques exemples, choisis assez arbitrairement, montreront la nature des questions posées et le style de leur résolution.

L'exercice 1 propose la résolution de l'équation diophantienne cubique $y^2+2 = x^3$ après discussion de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Les commentaires rapprochent cette équation du grand théorème de Fermat et avancent une hypothèse sur la nature de *la merveilleuse démonstration* imaginée par le grand mathématicien du XVII^{e} siècle et *qui n'avait pas trouvé place dans la marge* de l'Arithmétique de Diophante. L'exercice 4 propose une inattendue discussion du théorème de Fermat pour les polynômes à coefficients complexes.

L'exercice 6 conduit à la transcendance du nombre e à partir du calcul d'une famille d'intégrales, tandis que l'exercice 9 permet d'établir l'inégalité $A \geq G$ entre les moyennes arithmétique et géométrique *pondérées* à partir d'une autre famille d'intégrales.

L'exercice 10, sur la dimension de Hausdorff d'un compact de $\mathbb{R}^n$ débouche sur un instructif commentaire relatif aux fractales. L'exercice 13 consacré aux polygones à sommets entiers – dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont des entiers – exploite habilement l'anneau des entiers de Gauss.

D'autres exercices sont notamment consacrés au porisme de Steiner, à la densité des points rationnels d'une sphère, au théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques, aux surfaces minimales, au théorème de Brouwer en dimension 2, à une généralisation du théorème de Pascal sur les coniques passant par quatre points. Un ouvrage broché de moins de deux cents pages, assez dense, à l'impression très claire, à méditer à doses homéopathiques, et qui peut apporter beaucoup à un lecteur pas trop néophyte.

P. Bolli, Le Vaud

P.J. Nahin: Duelling Idiots and Other Probability Puzzlers. xviii + 269 Seiten, £ 13.95. Princeton University Press, Princeton and Oxford 2002; ISBN 0-691-10286-4.

„Some Things Just Have to Be Done by Hand!" und „When Theory Fails, There Is Always the Computer" lauten zwei Kapitelüberschriften. Und genau in diesem Spannungsfeld bewegen sich die über zwanzig unterschiedlichen stochastischen Probleme, die der Autor – Professor für elektrotechnische Ingenieurwissenschaften in New Hampshire – seinen Lesern als kleine Herausforderungen vorlegt. Nebst ausführlichen Lösungen zu den gestellten Problemen liefert der Autor auch noch über vierzig MATLAB-Programme, die er bei den Problemanalysen und Lösungen (insbesondere bei Simulationen) mit einbezieht. Zwei (pädagogische) Anliegen liegen seinem Buch zugrunde:

1) No matter how smart you are, there will always be a problem harder than one you can solve analytically.
2) If you know how to use a computer application like MATLAB, you may still be able to solve that "too-hard" problem by simulation.

Auch wenn viele der Problemstellungen eine humorvolle Einkleidung haben, so sind die dargestellten Analysen und Lösungsvorschläge gleichwohl sehr differenziert und mathematisch subtil; „sophisticated", wie die Engländer so treffend sagen. Der Autor wendet sich auch Fragestellungen zu, die nicht so häufig in Lehrbüchern anzutreffen sind. Ihn interessieren nicht die Verteilungsfunktionen von $Z = X + Y$, $Z = XY$ oder $Z = X/Y$, wenn X und Y unabhängige und je auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable sind; bei seinen Problemstellungen sind die Dichtefunktionen für $Z = X/(X-Y)$ oder für $Z = X^Y$ zu entwickeln. Auch bei der „frequentistischen" Berechnung von π greift er auf ein anderes als das bekannte Nadel-Problem von Buffon zurück.

Etwas ausführlicher behandelt Nahin – teilweise auf eigene Arbeiten zurückgreifend – zwei auf komplexe Projekte anwendbare Analyse- und Kontrollverfahren: PERT (Programm Evaluation and Review Technique) und CPM (Critical Path Method). Während ersteres als „deterministisch" bezeichnet werden kann, gilt das zweite als „probabilistisch". Ferner widmet der Autor ein faszinierendes Kapitel verschiedenen Verfahren zur Erzeugung von Zufallszahlen. Schliesslich möchte es der Rezensent nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass im Text erfreulicherweise immer wieder historische Zusammenhänge aufgedeckt werden oder auf Arbeiten anderer hingewiesen wird, die sich früher mit der jeweiligen Fragestellung auseinander gesetzt hatten.

Das Buch ist in gebundener Form bereits 2000 erschienen (ISBN 0-691-00979-1).

Hj. Stocker, Wädenswil

F. Guénard, H. Lemberg: La méthode expérimentale en mathématiques. xi + 240 Seiten, sFr. 53.50. Springer, Berlin u.a. 2001; ISBN 2-287-59719-0.

Dies ist eine Sammlung von vorgelösten Aufgaben, wie sie in den letzten Jahren an den mündlichen Zulassungsprüfungen zu den französischen Ingenieurschulen gestellt wurden.

Was macht das Interesse an diesem Buch aus? Es dokumentiert, wie sich die französische Tradition der Mathematikausbildung unter dem Einfluss von Computer-Algebra-Systemen (CAS) wandelt und welches die kulturbedingten Konstanten sind.

Das von den Kandidaten erwartete Vorgehen in diesen offen gestellten Aufgaben umfasst vier Hauptschritte: Das Problem analysieren, mit dem CAS zielgerichtet experimentieren und erkunden, Behauptungen formulieren, Beweis.

Der Text enthält 16 Beispiele mit ausführlich kommentierten Lösungen je für Mathematica, Maple, TI 92/89 und 27 ungelöste Beispiele.

Es zeigt sich, dass die Ansprüche in den Prüfungen keineswegs gesenkt werden, wenn die Kandidaten neben der Mathematik und der Heuristik auch noch ein CAS beherrschen müssen. Der Höhepunkt in jeder Lösung besteht in der Formulierung von Behauptung und Beweis. Es besteht kein Zweifel, dass Klarheit und Strenge der Argumentation nach wie vor absolut unerlässlich sind. Computerexperimente haben keine Beweiskraft. Ferner wird klar, dass auch von Ingenieuren erwartet wird, dass sie Fragen aus der abstrakten Mathematik methodisch kompetent bewältigen. Keine der Fragen ist mit Einkleidungen in die Nähe von vordergründigen „Anwendungen" gerückt. Französische Ingenieure werden mit reiner Mathematik an eine strenge Denkdisziplin gewöhnt und in einer beeindruckenden Fachsprache geschult. Die neue, offenere Art der Fragestellung verlagert die Ansprüche von der Beherrschung von Musteraufgaben – also einer Gedächtnisleistung – zur Erfahrung im Problemlösen mit Computerunterstützung.

Wer Kontakt zu den Autoren sucht, kann dies über `http://www.scopos.org` tun.

H.R. Schneebeli, Baden

I.R. Shafarevich: Discourses on Algebra. x + 276 Seiten, sFr. 51.50. Springer, Berlin u.a. 2002; ISBN 3-540-42253-6.

Wer nach alter Tradition die Mathematik des Gymnasiums in „Geometrie" und „Algebra" spaltet, mag sich darüber wundern, dass die Rolle, die Euklid spielte, in der Algebra weitgehend unbesetzt geblieben ist. Natürlich täuscht dieses Urteil etwas, denn auch Euklid hat sich mit Zahlentheorie befasst. Shafarevich hat sich aber zum Ziel gesetzt, die „Algebra" für die Schulmathematik so aufzubereiten, dass sie neben Euklids Geometrie gleichberechtigt auftritt.

Dieser Text ist von der russischen Schultradition geprägt. Dies betrifft sowohl Inhalte als auch Darstellung, Aufbau, Stil der Aufgaben und das Anspruchsniveau. Gelegentlich scheint sogar die englische Übersetzung sehr nahe an der russischen Terminologie geblieben zu sein.

Discourses on Algebra hat drei Themenbereiche: Zahlen, Polynome, Mengen. Wer aber genauer hinsieht, bemerkt, dass neben Zahlentheorie und vollständiger Induktion auch Kombinatorik und diskrete Wahrscheinlichkeit, der Aufbau des Zahlsystems bis und mit den reellen Zahlen, ja sogar eine auf Polynomfunktionen und Potenzreihen beschränkte Einführung in die Analysis geboten wird. Erstaunlicherweise fehlen aber komplexe Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra. Der Text ist angereichert mit biografischen Notizen. Wählt man diese als Indikator, so stellt sich heraus, dass die Entwicklung nur bis etwa 1920 verfolgt wird. „Moderne Algebra" ist damit nicht zu erwarten. Ferner ist Algorithmik nach heutigem Verständnis markant untervertreten.

Shafarevich wird seinem Ruf als didaktisch geschickter mathematischer Literat gerecht. Allerdings steht dieser Text in unserem gegenwärtigen Umfeld eher isoliert da. Er will nicht mehr so richtig zur Mathematikpraxis (Lehrpläne und Stundendotationen) am Gymnasium passen. Wer sich aber einen Text wünscht, der die Algebra nach alter Schule mustergültig darstellt, wird sich an diesem Buch freuen können.

H.R. Schneebeli, Baden

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*