

---

---

## Aufgaben

---

---

Lösungen sind bis zum 10. August 2005 erbeten.  
Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen  
gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als At-  
tachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht  
werden.

### Neue Aufgaben

**Aufgabe 1215:** Man ermittle alle ganzzahligen Lösungen  $(x, y)$  der Gleichung

$$x^7 + y^4 = \left( \left( \left( 2005^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005}.$$

Eckard Specht, Magdeburg, D

**Aufgabe 1216:** Falls  $p = \ell^2 + \ell + 1$  für natürliche Zahlen  $\ell \geq 2$  eine Primzahl ist,  
betrachten wir im endlichen Körper  $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, \ell^2 + \ell\}$  das lineare  $\ell \times \ell$ -  
Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell \\ \ell + 1 & \ell + 2 & \ell + 3 & \cdots & 2\ell \\ 2\ell + 1 & 2\ell + 2 & 2\ell + 3 & \cdots & 3\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\ell - 1)\ell + 1 & (\ell - 1)\ell + 2 & (\ell - 1)\ell + 3 & \cdots & \ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell^2 + 1 \\ \ell^2 + 2 \\ \ell^2 + 3 \\ \vdots \\ \ell^2 + \ell \end{pmatrix}.$$

- Wie viele Lösungstupel  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\ell)^T$  besitzt dieses System?
- Bestimme jenes Lösungstupel  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\ell)^T$ , welches eine arithmetische Folge (im Sinne von  $(27, 37, 47, 57, 67)^T \equiv (27, 6, 16, 26, 5)^T \pmod{31}$ ) bildet.
- Unter welcher Bedingung für  $\ell$  gibt es Lösungstupel, die eine geometrische Folge bilden?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1217 (Die einfache dritte Aufgabe):** Einem Rechteck der Länge  $\ell$  und der Breite  $h$  ( $h < \ell$ ) sollen (alle vier Seiten berührende) Ellipsen einbeschrieben werden. In welcher Beziehung stehen die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse und der Winkel  $\varphi$ , den die grössere Halbachse  $a$  mit der Rechteckslänge einschliesst?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2004

**Aufgabe 1203.** Wir betrachten magische  $3 \times 3$ -Quadrate mit natürlichen Gliedern, bei denen die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen je 2004 betragen.

1. Wie viele solche Quadrate gibt es?
2. Jetzt sollen Quadrate, die durch Drehung oder Achsenspiegelung ineinander übergeführt werden können, als nicht wesentlich verschieden gelten. Wie viele wesentlich verschiedene Quadrate gibt es?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Christoph Gerber (Jegenstorf, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Beat Schweingruber (Zürich), Christoph Soland (Belmont, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Mehrere Einsendungen waren fehlerhaft. Die Löserin und einige Löser machten die zusätzliche Voraussetzung, dass alle Einträge verschieden sein müssen. Wir folgen der Lösung von *Christoph Soland*, der die Aufgabe mit und ohne diese Voraussetzung löst.

L'ensemble des carrés magiques  $3 \times 3$  à entrées réelles est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^9$  dont les carrés

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

constituent une base. Leur indépendance est en effet évidente et, si  $\mathcal{X}$  est un carré magique arbitraire, on calcule sans peine les coefficients  $\sigma$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  tels que

$$\mathcal{X} - \sigma\mathcal{S} - \gamma\mathcal{G} - \delta\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ce dernier carré étant magique est forcément le carré nul, par conséquent  $\mathcal{X} = \sigma\mathcal{S} + \gamma\mathcal{G} + \delta\mathcal{D}$ .

Soit donc

$$\begin{pmatrix} \sigma + \gamma & \sigma - \gamma - \delta & \sigma + \delta \\ \sigma - \gamma + \delta & \sigma & \sigma + \gamma - \delta \\ \sigma - \delta & \sigma + \gamma + \delta & \sigma - \gamma \end{pmatrix}$$

l'un des carrés cherchés. Sa somme magique est  $3\sigma = 2004$ , ce qui impose  $\sigma = 668$ . Ses entrées sont des entiers strictement positifs si, et seulement si le couple  $(\gamma, \delta)$  appartient au carré du plan  $\mathbb{Z}^2$  définie par  $|\gamma| + |\delta| \leq 667$ . Il y a donc  $667^2 + 668^2 = 891113$  carrés satisfaisant aux conditions imposées.

Pour compter le nombre d'orbites de cet ensemble sous l'action du groupe des isométries du carré, on utilise le théorème de Pólya. On trouve

Isométrie du carré magique	Condition d'invariance	Nombre de carrés	Total partiel
Identité	Aucune	891113	891113
Une des trois rotations	$\gamma = \delta = 0$	1	3
Une des deux symétries axiales sans sommet fixe	$ \gamma  =  \delta $	667	1334
Une des deux symétries axiales fixant deux sommets	$\gamma = 0$ ou $\delta = 0$	1335	2670
Total général			895120

Donc le nombre d'orbites est  $895120/8 = 111890$ .

Il n'est pas plus difficile de compter les carrés dont toutes les entrées sont distinctes; c'est le cas si aucune des expressions  $\gamma, \delta, \gamma \pm \delta, \gamma \pm 2\delta, 2\gamma \pm \delta$  n'est nulle. Il faut enlever des  $667^2 + 668^2$  couples  $(\gamma, \delta)$  précédents: l'origine,  $4 \cdot 667$  couples  $\neq (0, 0)$  vérifiant  $\gamma = 0$  ou  $\delta = 0$ ,  $8 \cdot 222$  couples  $\neq (0, 0)$  vérifiant  $\gamma \pm 2\delta = 0$  ou  $2\gamma \pm \delta = 0$  et  $4 \cdot 333$  couples  $\neq (0, 0)$  vérifiant  $\gamma \pm \delta = 0$ , ce qui laisse  $885336$  carrés à entrées distinctes. Comme l'identité est la seule isométrie laissant invariant un carré à entrées distinctes, le nombre d'orbites de ces carrés est  $885336/8 = 110667$ .

Die Methode von *Christoph Soland* lässt sich auf die allgemeinere Situation mit der magischen Summe  $3\ell$  anwenden. Man erhält  $2\ell^2 - 2\ell + 1$  mögliche magische Quadrate in  $\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2\right]$  Äquivalenzklassen. (Beim Anwenden des Satzes von Pólya bedarf es einer Fallunterscheidung zwischen geradem und ungeradem  $\ell$ .) Mehrere Löser haben dieses Ergebnis erhalten.

Auch die Variante, dass alle Einträge verschieden sein sollen, lässt sich mit obigen Ideen bewältigen. Man erhält

$$4 \cdot \left( \binom{\ell-1}{2} - \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{\ell-1}{3} \right\rfloor \right)$$

mögliche Quadrate in

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \binom{\ell-1}{2} - \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{\ell-1}{3} \right\rfloor \right)$$

Äquivalenzklassen. Allerdings findet sich dieses Resultat nicht unter den Einsendungen.

**Aufgabe 1204.** Es seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen mit  $m < 2n$ . Beweise:

$$\sum_{\ell=1}^n \sin\left(\frac{2\ell-1}{2n}m\pi\right) \cdot \tan\left(\frac{2\ell-1}{4n}\pi\right) = (-1)^{m-1} \cdot n.$$

Friedhelm Götze, Jena, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 17 Lösungen eingetroffen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Lajos László (Budapest, H), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Die meisten Einsender verwenden in ihren Lösungen mehrere trigonometrische Identitäten aus Formelsammlungen, die sie dann – mehr oder weniger trickreich – zusammensetzen. Zwei Löser verwenden Residuenrechnung.

Mit einfachstem Formelaufwand gelangt *Roland Wyss* zum Ziel (seine Lösung stimmt weitgehend mit jener von *Klaus Zacharias* überein):

Als Grundlage dienen die beiden für  $0 < \varphi < \pi$  gültigen Formeln

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\cos((m-1)\varphi) - \cos(m\varphi)}{\sin((m-1)\varphi) + \sin(m\varphi)} \quad (1)$$

und

$$\sum_{\ell=1}^n \cos((2\ell-1)\varphi) = \frac{\sin(2n\varphi)}{2\sin(\varphi)}. \quad (2)$$

Formel (2) kann beispielsweise durch Betrachten des Realteils der geometrischen Reihe

$\sum_{\ell=1}^n e^{(2\ell-1)i\varphi}$  gewonnen werden; Formel (1) ist elementar.

Bezeichnet  $\sigma(m)$  die vorgelegte Summe, so zeigt man

1.  $\sigma(1) = n$
2.  $\sigma(m-1) + \sigma(m) = 0$  für  $m \geq 2$ .

Das Resultat  $\sigma(m) = (-1)^{m-1} \cdot n$  ergibt sich dann unmittelbar durch Induktion nach  $m$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad \sigma(1) &= \sum_{\ell=1}^n 2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\ell-1}{4n}\pi\right) = \sum_{\ell=1}^n \left(1 - \cos\left(\frac{2\ell-1}{2n}\pi\right)\right) \\ &= n - \sum_{\ell=1}^n \cos\left((2\ell-1)\frac{\pi}{2n}\right) = n, \end{aligned}$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen die Formel (2) für  $\varphi = \frac{\pi}{2n}$  verwendet wurde.

2. Aus Formel (1) gewinnt man mit  $\varphi = \frac{2\ell-1}{2n} \cdot \pi$  reine Cosinussummen für

$$\begin{aligned} & \sigma(m-1) + \sigma(m) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left( \sin \left( \frac{2\ell-1}{2n} (m-1)\pi \right) - \sin \left( \frac{2\ell-1}{2n} m\pi \right) \right) \tan \left( \frac{2\ell-1}{4n} \pi \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\ell=1}^n \left( \cos \left( \frac{2\ell-1}{2n} (m-1)\pi \right) - \cos \left( \frac{2\ell-1}{2n} m\pi \right) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^n \cos \left( \frac{2\ell-1}{2n} (m-1)\pi \right)}_{(\dagger)} - \underbrace{\sum_{\ell=1}^n \cos \left( \frac{2\ell-1}{2n} m\pi \right)}_{(\ddagger)} = 0. \end{aligned}$$

Gemäss Formel (2) für die Winkel  $\varphi = \frac{m-1}{2n} \cdot \pi$  resp.  $\varphi = \frac{m}{2n} \cdot \pi$  verschwinden nämlich die beiden Summen  $(\dagger)$  und  $(\ddagger)$ . (Hier wird die Voraussetzung  $m < 2n$  verwendet; sie garantiert, dass bei  $(*)$ ,  $(\dagger)$  und  $(\ddagger)$  alle verwendeten Winkel  $\varphi$  im Gültigkeitsbereich  $0 < \varphi < \pi$  der Formeln (1) und (2) liegen.)

**Aufgabe 1205 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die aus dem Schulunterricht bekannte Aufgabe „Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang maximale Fläche?“ wird wie folgt verallgemeinert: Aus einer rechteckigen Blechplatte mit den Seitenlängen  $a \cdot x$  und  $y$ ,  $a > 1$ , müssen  $m \geq 0$  Quadrate der Seitenlänge  $x$  und  $n \geq 0$  Kreise mit dem Durchmesser  $x$  ausgestanzt werden. Wie sind  $x$  und  $y$  zu wählen, damit bei gegebener Umrandungslänge  $u$  die Fläche der Restfigur maximal wird? Man zeige auch, dass das überlappungsfreie Ausstanzen der  $m + n$  Figuren dann wirklich möglich ist.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 4 Zuschriften eingegangen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Carolyne Ryser (Langenbruck, CH).

Wir folgen *Dieter Koller*: Für die Umrandungslänge  $u$  gilt

$$u = 2ax + 2y + m \cdot 4x + n \cdot \pi x = (2a + 4m + n\pi)x + 2y. \quad (1)$$

Die Restfläche  $r$  beträgt

$$r = axy - mx^2 - n \left( \frac{x}{2} \right)^2 = axy - \left( m + \frac{n\pi}{4} \right) x^2. \quad (2)$$

Setzt man den aus (1) erhaltenen Ausdruck

$$y = \frac{u - (2a + 4m + n\pi)x}{2} \quad (3)$$

in (2) ein, so ergibt sich

$$r = r(x) = \frac{aux - a(2a + 4m + n\pi)x^2}{2} - \left( m + \frac{n\pi}{4} \right) x^2.$$

Die Restfläche  $r$  ist eine quadratische Funktion in  $x$ . Sie ist maximal in

$$x_0 = \frac{a}{4a^2 + (2a + 1)(4m + n\pi)} \cdot u. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) erhält man

$$y_0 = \frac{2a^2 + (a + 1)(4m + n\pi)}{2(4a^2 + (2a + 1)(4m + n\pi))} \cdot u. \quad (5)$$

Die optimale Blechplatte hat also die Breite  $ax_0$  und die Länge  $y_0$ . Im Spezialfall  $m = n = 0$  wird nichts ausgestanzt; dann hat man das „Schulbuchresultat“  $ax_0 = y_0 = \frac{u}{4}$ . Es sei also  $(m, n) \neq (0, 0)$ . Mit (4) und (5) erhält man

$$\frac{y_0}{x_0} = a + \frac{a + 1}{2a}(4m + n\pi) > \frac{a + 1}{2a}(2m + 2n) > \frac{1}{2}(2m + 2n) = m + n$$

und somit  $y_0 > (m + n)x_0$ . Diese Ungleichung garantiert aber, dass das überlappungsfreie Ausstanzen möglich ist.

*Nachtrag:* In der Löserliste von Aufgabe 1199 (Heft 3/2004) ist Peter Bundschuh (Köln, D) vergessen gegangen. Er hat ebenfalls eine korrekte Lösung eingesandt.