Elem. Math. 60 (2005) 89 – 107
0013-6018/05/030089-19

Elemente der Mathematik

Der Euler des 19. Jahrhunderts: C.G. Jacob Jacobi[1]

Herbert Pieper

Herbert Pieper promovierte im Jahr 1970 über ein zahlentheoretisches Thema an der Humboldt-Universität zu Berlin (HU). Ab Ende der siebziger Jahre begann er sich vermehrt der Wissenschaftsgeschichte zuzuwenden. Von 1966 bis 1999 war er wissenschaftlicher Mitarbeiter der HU, verschiedener Institute der Akademie der Wissenschaften der DDR, der Technischen Universität Berlin und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften (BBAW). Seit Oktober 1999 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter der Alexander-von-Humboldt-Forschungsstelle der BBAW.

1 Einleitung

Am 1. Juli des Jahres 1852 beging die Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin ihren jährlichen Leibniz-Tag zu Ehren ihres Initiators und ersten Präsidenten Gottfried Wilhelm Leibniz. An diesem Tag hielt der namhafte Mathematiker Gustav Dirichlet, Mitglied der Akademie und Professor an der Berliner Universität, den ehrenden Nachruf auf das im Februar 1851 verstorbene Mitglied Jacob Jacobi. Dirichlet würdigte Jacobi als den

[1]Nach dem Vortrag „Der Mathematiker C.G. Jacob Jacobi – ein Sohn der Stadt Potsdam“, den ich am 9. Dezember 2004 am Institut für Mathematik der Universität Potsdam gehalten habe.

Für die kritische Durchsicht des Manuskripts und die Verbesserungsvorschläge danke ich Herrn N. Schappacher (Strasbourg) ganz herzlich. H.P.

Carl Gustav Jacob Jacobi (10.12.1804 – 18.2.1851) gehört nächst Gauß zu den bedeutendsten deutschen Mathematikern seiner Zeit. In seinen Forschungen und Vorlesungen an der Königsberger Universität hatte er Aktivitäten entfaltet, die ihn als einen der ideenreichsten und produktivsten Mathematiker, einen Reformator des mathematischen Universitätsunterrichts und den Begründer einer mathematischen Schule auswiesen. Anlässlich des 200. Jahrestages der Geburt Jacobis werden in diesem Beitrag ausgewählte Aspekte seines Lebens beleuchtet: Jacobi auf dem Potsdamer Gymnasium, Jacobi und die jüdische Gemeinde Potsdam, Jacobi und Euler, Jacobi und Alexander von Humboldt. Zuvor wird eine Übersicht über Jacobis Leben und Wirken gegeben. Als Abschluss folgt eine Würdigung von Jacobis Werk, wobei ein Jacobisches Resultat detaillierter vorgestellt wird.

größten Mathematiker, welcher seit Lagrange der Berliner Akademie der Wissenschaften als anwesendes Mitglied angehört hat, als einen Gelehrten, „welcher mit starker Hand in fast alle Gebiete einer durch zweitausendjährige Arbeit zu unermeßlichem Umfange angewachsenen Wissenschaft eingegriffen, überall, wohin er seinen schöpferischen Geist gerichtet, wichtige oft tief verborgene Wahrheiten zu Tage gefördert und, neue Grundgedanken in die Wissenschaft einführend, die mathematischen Speculationen in mehr als einer Richtung auf eine höhere Stufe erhoben hat“ ([7, 193]).

Der von Dirichlet genannte Joseph Louis Lagrange war neben Euler und Lambert einer der drei bedeutenden Mathematiker, die zwischen 1741 und 1787 an der Berliner Akademie der Wissenschaften wirkten.[2] Er „erhob [so Jacobi] die Wissenschaft der mathematischen Analysis durch reiche Entdeckungen und vollendete Form zur glänzendsten Höhe“ (Jacobi; [11, VII, 373]). In der Tat waren die Akademiemitglieder nach Lagrange und vor Jacobi weniger bedeutend, mit einer Ausnahme: Jacobis Freund Dirichlet selbst. Er war bereits seit 1832 anwesendes, ordentliches Mitglied der Akademie. Jacobi war seit 1829 korrespondierendes, seit 1836 auswärtiges, also stets abwesendes Mitglied und erst seit 1844 anwesendes ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Wer war dieser ausgezeichnete Mathematiker Jacobi, der von 1826 bis 1843 an der Universität in Königsberg forschte und lehrte, und von 1844 bis 1851 als Akademiemitglied in Berlin wirkte?

Der berühmte Philologe August Boeckh hatte an seinem ehemaligen Schüler Jacobi „das eine nur ... auszusetzen, daß [er] aus Potsdam sei, da sei noch nie ein berühmter Mann hergekommen“ ([16, 253]). Indes hat die Stadt Potsdam in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts der Welt vier bedeutende Wissenschaftler geschenkt: 1801 Moritz Hermann Jacobi, 1804 Carl Gustav Jacob Jacobi, 1821 Hermann Helmholtz, 1834 Ernst Haeckel. Das ehemalige Victoria-Gymnasium trägt heute Helmholtz’ Namen. Es war übrigens Jacob Jacobi, der um 1847 als einziger führender Gelehrter gleich die ganze Tragweite der Helmholtzschen Arbeit *Über die Erhaltung der Kräfte* erfasste, und zwar gegen die Meinung der damaligen Physiker, die diese Arbeit als naturphilosophische Spekulation zurückwiesen.

Anlässlich des 200. Jahrestages der Geburt Jacobis werden im Folgenden ausgewählte Aspekte seines Lebens beleuchtet: Jacobi auf dem Potsdamer Gymnasium, Jacobi und die jüdische Gemeinde Potsdam, Jacobi und Euler, Jacobi und Alexander von Humboldt. Zuvor wird eine Übersicht über Jacobis Leben und Wirken gegeben. Als Abschluss folgt eine Würdigung von Jacobis Werk, wobei ein Jacobisches Resultat detaillierter vorgestellt wird.

2 Ein „radioaktives Zentrum, welches durch Verbindung von Forschung und Lehre eine Wirkung durch Kettenreaktion ausübte“: Übersicht über Jacobis Leben und Wirken

Jacobi wurde am 10. Dezember 1804 in Potsdam geboren. Vom 1. November 1816 bis Ostern 1821 besuchte er das Potsdamer Gymnasium, auf dem später auch Hermann Helmholtz sein Reifezeugnis erhielt. Danach studierte er an der Universität Berlin Philosophie

[2] Er war von 1766 bis 1787 Nachfolger von Leonhard Euler, der von 1741 bis 1766 hier tätig war. Der vielseitige Gelehrte Johann Heinrich Lambert, an erster Stelle Mathematiker, war im Jahre 1765 zum Mitglied der physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften berufen worden.

und Philologie. Der 19-jährige Student entschloß sich, der Mathematik sein Leben zu widmen. Sein mathematisches Wissen eignete er sich vorwiegend im Selbststudium an. Als im Dezember 1822 die preußische Kabinettsorder bekanntgegeben wurde, durch die den Juden die im Juden-Edikt von 1812 zugesicherte Berechtigung zur Bekleidung akademischer Lehrämter wieder genommen wurde, war die erstrebte Universitätslaufbahn für Jacobi nur durch die Taufe zu erreichen.

Jacobi erhielt bereits im August 1825 das Doktordiplom und habilitierte sich zeitgleich mit der Promotion als Privatdozent. Anfang Mai 1826 siedelte er nach Königsberg über, wo er 17 Jahre an der Albertus-Universität[3] wirkte. Am 8. März 1829 wurde er dort zum ordentlichen Professor berufen[4]. Am 11. September 1831 heiratete er Marie Schwinck, die Tochter eines Großkaufmanns in Königsberg. Sie hatten drei Töchter (Susanne, Margarethe, Gertrud) und fünf Söhne (Leonhard, Nicolas, Adrian, Anton, Stephan).

Mit einer Disputation am 7. Juli 1832, die er (wie er schrieb) „mit einer fulminanten lateinischen Rede, die mit großem Pathos das Wesen der reinen Mathematik verherrlichte", eröffnete, trat Jacobi in die philosophische Fakultät der Königsberger Universität ein (vgl. [15]). Nach der Kantschen Ära[5] wurde die Albertina nun durch Jacobi, den Astronomen Bessel[6] und den Physiker Franz Neumann[7] zum Zentrum der exakten Wissenschaften. Dort bildete insbesondere Jacobi (wie R. Courant einmal sagte) ein „radioaktives Zentrum, welches durch Verbindung von Forschung und Lehre eine Wirkung durch Kettenreaktion ausübte" ([6, 18]). Den Einfluss Jacobis auf seine Studenten und Schüler beschrieb Felix Klein so: „Die widerstrebendsten Naturen zwang er in seine Denkweise hinein, jeden riss er zur Höhe speziell mathematischen Ehrgeizes, zum brennenden Interesse an der von ihm gegebenen Problemstellung des Tages mit fort. Nicht nur fremde Fähigkeiten anregend und weckend [...], sondern jeden in den Bann seines augenblicklichen Gedankenganges hineinzwingend, war Jacobi der ausersehene Mann dazu eine umfangreiche, auf Jahre hinaus blühende Schule zu begründen" ([14, I, 112–113]).

In Jacobis Vorlesungen wurde nichts Fertiges, Überliefertes von neuem überliefert, „seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfassten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechslung" ([7, 211]). Jacobi trug seine methodisch wohldurchdachten Vorlesungen frei vor. Sein Auftreten diente seinen bedeutenden Schülern später als Muster ihrer eigenen Vorlesungen an vielen deutschen Universitäten.

Man kann Jacobi infolge der von ihm eingeleiteten Änderung des Lehrbetriebes als einen Reformator des mathematischen Universitätsunterrichts ansehen. Die hauptsächli-

[3] Die 1544 gestiftete Universität zu Königsberg hatte noch bis ins 19. Jahrhundert hinein evangelischen Charakter: Es waren nur Lehrer evangelischer Konfession zugelassen und anzustellen. So konnte sich Karl Weierstraß wegen seiner katholischen Konfession dort nicht habilitieren.

[4] Jacobi wurde Nachfolger des 1826 verstorbenen Mathematikprofessors Friedrich Wrede.

[5] Immanuel Kant lehrte von 1755 bis zu seinem Tode an der Albertina, bis 1770 als Mathematiker und Naturwissenschaftler, danach als Philosoph. Er starb im Geburtsjahr Jacobis, am 12. Februar 1804.

[6] Friedrich Wilhelm Bessel war im Jahre 1810 auf den Lehrstuhl für Astronomie berufen worden.

[7] Franz Ernst Neumann fing in Königsberg, wie Jacobi, 1826 als Privatdozent an. Nach dem Tode von Karl Gottfried Hagen im Jahre 1829 wurde er ordentlicher Professor für Mineralogie und Physik. Seine Vorlesungen über theoretische (mathematische) Physik waren die ersten und lange Zeit die einzigen im deutschen Sprachraum.

che Schwierigkeit dieser Reform bestand nicht darin, dass Jacobi die Studenten nicht mehr nur mit der älteren Mathematik bekannt machte, dass er vielmehr auch die zeitgenössischen, insbesondere die eigenen Ergebnisse, Methoden und Probleme vortrug (oft nahm er sich gar nicht die Zeit, sie in Zeitschriften zu veröffentlichen), sondern sie lag darin, die Studenten „für solche Vorlesungen empfänglich zu machen, sie heranzuziehen und dauernd zu fesseln, so dass sie nicht absprangen, wenn größere Anstrengungen des Denkens und schwerere geistige Arbeit ihnen zugemutet wurden“ ([17, II, 825]). Die Studenten der ersten Semester wurden von Jacobis Schülern (wie Richelot, Sohncke, Hesse) in ihren Vorlesungen auf Jacobis Lehrveranstaltungen vorbereitet. Diesem Zweck diente auch das 1834 von Jacobi zusammen mit Neumann und Sohncke gegründete mathematisch-physikalische Seminar mit der Abteilung für reine und angewandte Mathematik und der Abteilung für mathematische Physik. Hier wurden die Studenten zu eigener Arbeit angeleitet, ihre Selbsttätigkeit gefördert und sie in eine Berührung mit ihren Lehrern gebracht, die näher und fruchtbarer war, als sie durch das bloße Anhören der Vorlesungen sein konnte. So konnte Dirichlet 1851 zurecht auf den Einfluss Jacobis „in seinem Berufe als Universitätslehrer“ hinweisen, den er „auf den großen Aufschwung geübt hat, den die mathematischen Studien während des letzten Vierteljahrhunderts in unserem deutschen Vaterlande genommen haben“ ([8, II, 222])[8].

[8] Es seien nur einige Mathematiker und Physiker genannt, die aus der „Königsberger Schule“, insbesondere aus dem Jacobi (bzw. Richelot)-Neumannschen Seminar hervorgegangen sind: L.A. Sohncke (später in Halle), E. Heine (später in Bonn, Halle), C. Neumann (später in Halle, Tübingen, Leipzig), C.W. Borchardt (später in Berlin), F. Joachimsthal (später in Berlin, Halle, Breslau), L.O. Hesse (später in Heidelberg, München),

Ende 1841 erkrankte Jacobi an Diabetes mellitus. Im Jahre 1843 konnte er sich dank erfolgreicher Bemühungen Alexander von Humboldts um eine finanzielle Beihilfe für fast ein Jahr auf eine Erholungsreise begeben, die ihn nach Italien führte. Im Winter 1843 auf 1844 bildeten Jacobi, Dirichlet, Steiner, der Jacobi-Schüler Borchardt, der Schweizer Mathematiker Schlaefli „gewissermaßen eine mathematische Colonie in Rom“ ([5, 600]). Aus gesundheitlichen Gründen wurde Jacobi danach gestattet, Königsberg gegen Berlin, wo ein milderes Klima herrscht, zu vertauschen.[9] Vom September 1844 an wirkte er hier als besoldetes Akademiemitglied, wobei er auch von seinem Recht Gebrauch machte, an der Universität Vorlesungen zu halten.

Neben Jacobi wirkten in Berlin Dirichlet und Jacob Steiner. Zusammen mit Ferdinand Minding haben sie den Grundstein gelegt für den Aufstieg der Berliner Mathematik. Aber die großartige Entwicklung der Mathematik in Berlin begann eigentlich erst mit Jacobis Übersiedlung. Mit ihm wurde der Schwerpunkt der mathematischen Forschung nach Berlin verlegt. Auch der von Alexander von Humboldt unter Mithilfe von Gauß geförderte junge Mathematiker Gotthold Eisenstein hat das mathematische Gesicht dieser Stadt in der Zeit Jacobis mitbestimmt ([28]).

Im Frühjahr 1848 versuchte Jacobi, ein Ordinariat an der philosophischen Fakultät der Berliner Universität zu erlangen. Die Ablehnung seines Antrags war in erster Linie eine Reaktion auf Jacobis politische Betätigung nach den Märzereignissen von 1848 ([21]). Eine zweite Reaktion darauf erfolgte Ende Mai 1849. Jacobi sollte die mit der Königsberger Professur verbundenen Pflichten wieder übernehmen. Es folgten (um ihn zur Rückkehr nach Königsberg zu zwingen) finanzielle Repressalien. Jacobi sah sich gezwungen, einen Ruf nach Wien anzunehmen. Alexander von Humboldt setzte sich erfolgreich dafür ein, Jacobi geldlich wieder abzusichern, um so seinen Fortgang nach Wien zu verhindern (vgl. [29]).

Treffen zwischen Mathematikern waren im 19. Jahrhundert nicht so häufig wie heute, im Zeitalter ständiger Kongresse und Tagungen. Und ein Treffen mit Carl Friedrich Gauß, dem „princeps mathematicorum“ (Fürst der Mathematiker), konnte für die Zeitgenossen fast zur Wallfahrt werden. Jacobi hat Gauß wenigstens dreimal in Göttingen besucht. Zuerst lernte er ihn 1829 auf der Durchreise nach Paris kennen. Zehn Jahre später, im September 1839, war Jacobi „mit Dirichlet zufällig in Göttingen zusammen[getroffen], wo [sie] 8 Tage mit Weber und Gauß verlebten“ ([1, 68]). Jacobi kam von der Naturforscherversammlung in Pyrmont, Dirichlet wohl aus Paris. Sie erfuhren, dass Gauß die russische Sprache lernte („weil er, wie er mir sagte [so Jacobi], sehen wollte, ob er in seinem Alter noch etwas ganz neues zu erlernen im Stande sei“, [1, 70]), dass Gauß Anfang des Jahrhunderts zweimal einen Ruf nach Petersburg gehabt hat („wo man [so Jacobi] wahrscheinlich durch ihn die Zeiten Eulers wiederaufleben lassen wollte“), dass Gauß gern Göttingen verlassen würde. „Seine Aufnahme war nicht besonders freundlich“, schrieb Jacobi seinem Bruder. Jacobi hatte mit Gauß „einen wütenden Streit“[10] über eine Stelle in der analyti-

G.R. Kichhoff (später in Heidelberg), P.L. Seidel (später in München), A. Clebsch (später in Gießen, Göttingen), I.D. Sokolloff (später in Charkow), A.N. Tichomandritzki (später in Kiew), M.F. Spassky (später in Moskau).

[9] Jacobis Nachfolger in Königsberg wurde (1844) sein Schüler Friedrich Richelot, dem Heinrich Weber, Ferdinand von Lindemann, David Hilbert und Hermann Minkowski als Ordinarien folgten.

[10] Jacobi an Kummer, 17. Dezember 1842. Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Nachlass Dirichlet, Nr. 49.

schen Mechanik von Lagrange. Weitere 10 Jahre später, am 16. Juli 1849, ehrten wiederum Jacobi und Dirichlet (damals beide 44 Jahre alt) den 72-jährigen Gauß in Göttingen aus Anlaß von Gauß' 50-jährigem Doktorjubiläum.

Jacobi starb an einer Pockenerkrankung am 18. Februar 1851.

3 „Ein universeller Kopf": Jacobi auf dem Potsdamer Gymnasium

Wir sind über Jacobis Besuch des Gymnasiums durch eine Arbeit von Ernst Kusch unterrichtet, die in einer Programmschrift des Victoria-Gymnasiums erschienen ist ([18]).

Als Jacobi im November 1816 in die Schule als Schüler eintrat, bestand sie erst aus vier Klassen. Im Gebäude der ehemaligen Großen Stadtschule untergebracht, nannte sie sich wohl seit 1814 Gymnasium. Aber, so heißt es bei Kusch, „erst im Laufe des Jahres 1817 wurde sie durch Hinzufügung zweier Klassen und durch Verdopplung der Zahl der ordentlichen Lehrer zu einem wirklichen Gymnasium umgestaltet".

Jacobi wurde, noch nicht zwölf Jahre alt, sofort in die zweite Klasse und schon nach einem halben Jahr in die erste aufgenommen. Dirichlet sagte später: „In dieser blieb er volle 4 Jahre, da er nicht füglich vor zurückgelegtem 16ten Jahre die Universität besuchen konnte" ([7, 194]). Jacobis Mathematiklehrer war Heinrich Bauer, über den der Rektor 1827 wie folgt urteilte: „Durch sein seltenes Lehrertalent, durch seine tiefe Kenntnis der Mathematik und der damit verbundenen Wissenschaften, durch seine gründliche Bekanntschaft mit der hebräischen und deutschen Sprache, erwarb er dem Gymnasium den Ruhm, dass er durch seinen Unterricht den möglichsten Grad der Gymnasialbildung bei unseren Scholaren bewirkte, daher in großer Achtung bei denselben stand." Auf Jacobis Initiative, in Dankbarkeit und Verehrung seines ehemaligen Lehrers, wurde Bauer 1845 anlässlich seines 50-jährigen Lehrerjubiläums Ehrenmitglied der Deutschen Gesellschaft zu Königsberg.

Im Frühjahr 1821 machte Jacobi sein Abitur, 1812 als Zulassungsvoraussetzung für ein Studium eingeführt. In der mathematischen Prüfungsarbeit gab er auf elegante Weise eine selbständig gefundene Lösung des folgenden Problems der sphärischen Trigonometrie: Wenn Polhöhe eines Orts, Abweichung eines Sterns, des Sternes Höhe, Stundenwinkel und Azimuth für diesen Ort gegeben sind, aus je drei dieser Stücke die beiden andern zu finden.

Im deutschen Aufsatz (über das Wesen, den Ursprung und die Verwerflichkeit des Egoismus, nebst Mitteln, sich vor diesem Laster, das viele das Laster des Tages nennen, zu wahren) schrieb Jacobi: „Humanität und Liebe, ihr seid die einzigen wahrhaften Mittel, uns vor Egoismus zu wahren, ihr führt durch einen inneren Zug des Herzens den Menschen zum Menschen, und bereitet ohne Unterschied jedem, der sich diesem geheimen Zuge hingibt, das glückselige Los eines wohltätigen Wirkens." Nach den schriftlichen Arbeiten in Latein (Aufsatz *de dictatore Romanorum*, Kommentierung eines lateinischen Textes), Französisch (Übersetzung eines deutschen Textes über das Leben eines brandenburgischen Kurfürsten ins Französische) und Griechisch (Übersetzung eines griechischen Textes ins Lateinische und Deutsche, lateinische Kommentierung des Textes) glänzte er auch in den mündlichen Prüfungen (Lateinisch, Hebräisch, Griechisch, Deutsch, Physik, Differential- und Integralrechnung sowie Geschichte). Im Protokoll der mündlichen Prüfung heißt es, dass sich die Abiturienten „in allen Objecten von einer sehr vortheilhaften Seite gezeigt [haben], wenn gleich nicht geleugnet werden kann, dass Jacobi durch seinen glänzenden Verstand [den einzigen Mitabiturienten] übertraf".

In Jacobis Abiturientenzeugnis vom 11. April 1821 wurde bescheinigt, dass „sein Benehmen gegen seine Mitschüler [...] stets anständig und theilnehmend [war], so dass er deren Achtung u[nd] Liebe besaß u[nd] verdiente", „sein Betragen gegen seine Lehrer [...] sich durch Bescheidenheit, Offenheit und Achtung [zeigte]", dass „sein Fleiß [...] äußerst angestrengt und unermüdet in allen Lehrgegenständen" war, dass „seine Kenntnisse ebenso gründlich als ausgezeichnet in der lateinischen Sprache – verbunden mit Mythologie und Archäologie – und ganz vorzüglich in der Mathematik" sind, „besonders besitzt er ganz ungewöhnliche Kenntnisse in der griechischen Sprache, und in der Geschichte".

Im Urteil des Rektors der Schule war Jacobi „ein universeller Kopf, und es ist nicht zu bestimmen, ob er zu Sprachen, zur Mathematik und Geschichte, oder zu welcher Wissenschaft sonst vorzügliche Geisteskraft besitze".

Als der Rektor am 17. Juni 1821 die Arbeiten und Protokolle der Abiturientenprüfungen an das Königliche Konsistorium der Provinz Brandenburg sandte, schrieb er in einem Begleitbrief: „Was den Abiturienten Jacobi betrifft, so glaube ich noch bemerken zu dürfen, dass er ungewöhnliche Fähigkeiten mit einer hohen Ruhe des Geistes besitzt, dass er alles ergreift und umfasst, ohne durch Ermüdung unterbrochen zu werden; jetzt studiert er zwar Philologie und Mathematik; schwerlich aber möchten ihn diese Fächer auf immer fixieren: in jedem Falle wird er sich einst merkwürdig machen." (Zitate aus [18])

4 „Mutter aus dem Stamme Abrahams": Jacobis Konversion

„Ich, Carl Gustav Jacob Jacobi, bin in Potsdam am 10. Dez. 1804 geboren", schrieb Jacobi in einem kurzen, anläßlich seiner Promotion 1825 verfaßten Lebenslauf (*Vita*; [11, III, 43]), „von den Eltern S. Jacobi, einem Geldwechsler, und der Mutter aus dem Stamme Abrahams." Er fuhr fort: „Der Vater ließ nichts aus, was meiner guten Erziehung diente, zu welchem Ziel er mich von zartestem Alter meinem Onkel F.A. Lehmann übergab, der mir über den gesamten Fünfjahreszeitraum ein einzigartiger und sehr lieber Lehrer war. Als dieser aber ein öffentliches Amt übernommen hatte, wurde ich dem Unterricht am Gymnasium, das in Potsdam blüht, am 1. November 1816 übergeben. Nach Ablauf eines Halbjahres ging ich auf die erste Klasse des Gymnasiums über und erlangte die glänzendste Gelegenheit, die Kenntnis jeder liberalen Wissenschaft auf den in der Kindheit gelegten Grundlagen zu errichten. Nach vier Jahren ging ich zur Universität, die hier [in Berlin] blüht und in Ewigkeit blühe, und schrieb mich für Philosophie ein. Und zunächst verlegte ich mich auf die Studien der Philologie. Nachdem ich darauf fast die gesamte Mühe auf mathematische Gegenstände verwandt hatte, zeigte ich nach dem Ablauf von drei Jahren eine Probe meiner mathematischen Studien dem hochwürdigen Kollegium der Philosophen, um die Lehrberechtigung an dieser Universität zu erhalten. Dies billigten jene hochehrwürdigen Herren entsprechend der Humanität, durch die sie sich auszeichnen" (Übersetzung aus dem Lateinischen von E. Knobloch).

Bis in die Berliner Studienzeit hinein trug Jacobi die Vornamen „Jacques Simon":

„Jacques" der Rufname, „Simon" der Vatersname. Als Student ist er – wie erwähnt – zum christlichen Glauben übergetreten. Wenn ein Jude sich taufen ließ, gestattete man ihm, seinen Namen zu ändern. Von seinen Eltern wurde Carl Gustav Jacob Jacobi aber weiterhin „Jacques“ genannt, bei der jüngeren Generation hieß er „Onkel Jacques“. (Wir sollten ihn „Jacques Jacobi“ oder „Jacob Jacobi“ nennen, oder auch „Gustav Jacobi“, denn auch so hat er private Briefe unterschrieben.)

Jacques Jacobi hatte eine Schwester, Therese, und zwei Brüder, Moses und Eduard. Die Mutter Rachel Jacobi, geb Lehmann (1774–1848), war mit dem Bankier Simon Jacobi (1772–1832) verheiratet.

Nach dem Tode des Vaters übernahm 1832 Jacobis jüngerer Bruder Eduard das väterliche Bankgeschäft in Potsdam. Jacobis Vater hatte letztwillig verfügt, dass das Vermögen von etwa 100 000 Talern ungeteilt in dem Bankgeschäft angelegt bleiben sollte. Doch 1841 machte Eduard Jacobi Bankrott, so dass die Miterben (darunter der Mathematiker) ihr Vermögen einbüßten. Übrigens wurde Eduard Jacobi daraufhin zu einer Festungsstrafe in Stettin verurteilt. Alexander von Humboldt setzte sich beim König dafür ein, eine vorzeitige Entlassung zu erreichen.

Jacobis älterer Bruder Moses wurde ein bedeutender Physiker und Elektrotechniker in Königsberg, Dorpat und St. Petersburg. Wir kennen ihn unter dem Namen „Moritz Hermann Jacobi“ oder „Boris Semjonowitsch Jacobi“. Über das Leben von Therese Jacobi, der einzigen Schwester Jacobis, ist nichts bekannt.

Die Geschwister sind in einem jüdischen Elternhaus aufgewachsen. Die Familie gehörte zur jüdischen Oberschicht. Der Vater „genoß das höchste Ansehen“. So jedenfalls beschreibt es der Rabbiner Robert Kaelter in seiner Gedenkschrift *Geschichte der jüdischen Gemeinde zu Potsdam* ([13]): „Bezeichnend für den Grad der Bildung dieses Mannes [des Bankiers Simon Jacobi] ist, dass in seinem Haus nur englisch und französisch gesprochen wurde und dass die höchsten Beamten der Provinz ständige Gäste dieses Hauses waren; es war kein seltenes Schauspiel, Simon Jacobi Arm in Arm mit einem dieser hohen Herrn am Freitag Abend auf dem Weg nach der Synagoge zu erblicken“ ([13, 36–37]). Die mit der Regierungszeit Friedrich Wilhelms II. (von 1786 bis 1797) begonnene „Zeit friedvollen Gedeihens“ ([13, 39]) der jüdischen Gemeinde in Potsdam nahm mit dem Zusammenbruch von 1806/1807 ein Ende. Von den Juden wurden in diesen Jahren der Not zusätzliche Opfer verlangt. Andererseits beschleunigte die Schaffung des Napoleonischen Imperiums die preußische Gesetzgebung: die Städteordnung von 1808 gab den Juden die Rechte von Stadtbürgern, das Emanzipationsedikt von 1812 die von Staatsbürgern. Der Prozess der Assimilation und der Emanzipation der Juden, jenes Streben nach Angleichung auf allen Gebieten, jener Kampf der Juden um Gleichberechtigung, der mit der Aufklärung und der Französischen Revolution an die Stelle des Ringens um Eigenberechtigung und gegenseitiger Duldung getreten war, der die traditionellen Lebensformen der jüdischen Gemeinde (gekennzeichnet durch die Einheit von jüdischer Nation, Religion und Kultur) grundlegend wandelte (bis hin zur vollen Identifizierung mit der deutschen Kultur und Nation, wobei das Judentum letztlich zur Konfession verdünnt wurde), dieser Prozess schien in Preußen mit dem Edikt von 1812 seinen Abschluss gefunden zu haben. Auftretende Probleme wurden zunächst durch den Befreiungskampf gegen Napoleon verdrängt. Von der allgemeinen Begeisterung für den Kampf wurden auch die preußischen Juden ergriffen. Nach der Niederlage Napoleons wurde die Judenemanzipation letztlich durch eine reaktionäre Verwaltungspraxis teilweise zurückgenommen.

Der Umschlag, der in der Judenpolitik nach den Freiheitskriegen eintrat, wurde in den Jahren nach dem Wiener Kongress durch eine christlich-germanische Hetze gegen die Juden begleitet. Die allgemeine wirtschaftliche und politische Unzufriedenheit, die Erbitterung des Volkes gegenüber den reaktionären Regierungen war gegen die Juden abgeleitet worden. Es war also trotz des Edikts von 1812 „eine böse Zeit“ für die Juden. Es gehörte schon, vor allem bei den Jugendlichen, „ein gewisser Heroismus dazu, beim Judentum auszuharren“, vermerkte der jüdische Historiker Samter und fügte hinzu: „Wo sollten aber die gebildeten jungen Herrn den Mut dazu hernehmen, da sie zum großen Teil innerlich längst mit dem Judentum zerfallen waren und sich ihrer Glaubensgenossen schämten. Daher sehen wir sie in hellen Haufen der Kirche zuströmen“ ([30, 25–26]).

Im Dezember 1822 wurde die preußische Kabinettsordre bekannt gegeben, durch die den Juden die im Edikt von 1812 zugesicherte Berechtigung zur Bekleidung akademischer Lehrämter wieder genommen wurde. Damit hatten sich die beruflichen Hoffnungen der jüdischen Studenten, deren Zahl infolge des Emanzipationsedikts stark angestiegen war, als trügerisch erwiesen. Bis zum Emanzipationsedikt von 1847 konnten Juden in Preußen nun nicht einmal mehr zur Habilitation gelangen. Die erstrebte Universitätslaufbahn war nur durch die Taufe zu erreichen.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts sind fast alle bedeutenden Juden in Preußen getauft worden. Erfolgte der Übertritt vereinzelt aus ehrlicher Überzeugung, so doch meist in der Absicht, das erforderliche Entréebillett zur europäischen Kultur zu lösen (wie Heinrich Heine es ausdrückte). Durch die Taufe, nicht aber durch das Edikt von 1812 (wie Felix Klein behauptete), wurde es möglich, dass Jacobi „der erste jüdische Mathematiker, der in Deutschland eine führende Stellung ([14, I, 114]) einnehmen sollte“, werden konnte.[11]

5 „Euler des 19. Jahrhunderts“: Jacobi und Euler

Dirichlet betonte in der erwähnten Rede: „Jacobis wissenschaftliche Laufbahn umfasst gerade ein Vierteljahrhundert, also einen weit kürzeren Zeitraum als die der meisten frühern Mathematiker ersten Ranges und kaum die Hälfte der Zeit, über welche sich Eulers Wirksamkeit erstreckt, mit dem er wie durch Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit so auch darin die größte Ähnlichkeit hat, dass ihm alle Hilfsmittel der Wissenschaft immer gegenwärtig waren und jeden Augenblick zu Gebote standen“ ([7, 217]).

Euler war unstreitig einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Der aus Basel stammende Gelehrte wirkte vor allem in Petersburg und Berlin. Kein Geringerer als Carl Friedrich Gauß schrieb über ihn: „Von keinem anderen Mathematiker älterer und neuerer Zeit kann man eine solche fast unbegreifliche Schnelligkeit in den schwierigsten Arbeiten bei einer solchen unerschöpflichen Fruchtbarkeit an neuen Ideen und Hilfsquellen rühmen. Alle

[11] Es seien noch einige bedeutende (getaufte oder ungetaufte) zeitgenössische jüdische Mathematiker des deutschen Sprachgebiets genannt: Moritz Abraham Stern in Göttingen, Carl Wilhelm Borchardt, Gotthold Eisenstein, Leopold Kronecker in Berlin. Stern studierte ein Semester in Heidelberg (1826) und danach in Göttingen. Seine Doktorprüfung am 5. März 1829 war die erste von Gauß abgehaltene. Noch im selben Jahr habilitierte sich Stern an der Georgia Augusta. 19 Jahre musste er sich mit der Stellung eines Privatdozenten zufrieden geben, ehe er als erster Jude in Deutschland, der sich nicht taufen ließ, 1848 Extraordinarius und 1859 Ordinarius (Vorgänger von Klein) in Göttingen wurde. Zu seinen Schülern gehörte übrigens Bernhard Riemann, der ebenfalls 1859 mit 23 Jahren als Ordinarius (Nachfolger von Dirichlet, Vorgänger von Clebsch) in Göttingen berufen wurde.

Teile der Mathematik bearbeitete er, und die meisten erhielten unter seinen Händen eine ganz neue Gestalt" ([4]). Eulers Forschungen bildeten den Ausgangspunkt zahlreicher mathematischer Untersuchungen Jacobis. Nicht zu Unrecht wurde Jacobi von seinen Schülern als der „Euler des 19. Jahrhunderts" ([1, 102]) gefeiert. Die enge Verbindung Jacobis mit Euler spiegelt sich in einigen unübersehbaren Tatsachen wider: Jacobis Euler-Verehrung, dem historischen Interesse an Euler, der mit Euler übereinstimmenden Denk- und Arbeitsweise, dem mathematischen Schaffen Jacobis in ausdrücklicher Nachfolge Eulers.

Jacobi sammelte Bücher Eulers und Sammelbände mit Eulerschen Abhandlungen und studierte sie eifrig. „Es ist wunderbar, dass man noch heute jede seiner Abhandlungen nicht bloß mit Belehrung, sondern mit Vergnügen liest", schrieb Jacobi (im Januar 1849) seinem Bruder ([1]). Vergeblich versuchte er, die 1783 und 1785 in Petersburg erschienenen beiden Bände *Opuscula analytica* Eulers zu erhalten. Als Eulers Urenkel Paul Heinrich von Fuß ihm die Bände aus Petersburg sandte, schrieb Jacobi ihm (am 3. Mai 1841): „Ich sah sie [die beiden Bände] zuerst vor zwei Jahren bei Crelle und entdeckte gleich etwas, was Dirichlet und ich bisher für unser Eigenthum gehalten hatten; anderes, indem es alte Ideen von mir befruchtete, kann mich vielleicht zu einer interessanten Entdeckung führen" ([31]). In der Tat, die Eulerschen Schriften wurden für Jacobi eine Fundgrube der Anregung. Sie boten vielfältige Anregung für schöpferisches Weiterdenken, stimulierten seine wissenschaftliche Arbeit. Eulersche Resultate und Methoden führten Jacobi zu neuen scharfsinnigen Entdeckungen.

Das 1846 von der Petersburger Akademie der Wissenschaften ins Leben gerufene Unternehmen einer kleinen Ausgabe Eulerscher Werke unterstützte Jacobi mit begeisterter Anteilnahme ([22]). Er recherchierte in Berlin in der Königlichen Bibliothek und im Archiv der Akademie der Wissenschaften nach Euler betreffenden Archivalien. Er erarbeitete ausführliche, bis ins Detail gehende Vorschläge für eine systematische, sachlich und innerhalb der Sachgebiete chronologisch zu ordnende Ausgabe der Eulerschen Schriften. Jacobi scheute nicht die Mühe, die Eulerschen gedruckten Abhandlungen mit den im Archiv liegenden handschriftlichen zu vergleichen. Jacobis Archivstudien dienten später dem Mathematikhistoriker Gustav Eneström zur Präzisierung der Chronologie der Eulerschen Arbeiten als Grundlage für das von ihm herausgegebene Verzeichnis der Schriften Eulers.

6 „… der Effekt liegt in der Ideenverknüpfung": Der Briefwechsel zwischen Jacobi und Alexander von Humboldt

Die Entwicklung der Mathematik ist unbestritten auch durch kosmologisch-astronomische Fragestellungen stimuliert worden. Bis ins 19. Jahrhundert hinein war die Mathematik stets mit der Astronomie verbunden. Kosmologische Spekulationen, astronomische Probleme, Aufgaben zu Kalenderberechnungen gaben den Anstoß für zahlreiche mathematische Untersuchungen. Mathematische Erkenntnisse wiederum ermöglichten erst die Bewältigung astronomischer Fragestellungen. Mit dieser fruchtbaren Wechselwirkung hatte sich auch der Forschungsreisende, Naturforscher und Geograph Alexander von Humboldt zu beschäftigen, bevor er im zweiten Band seines *Kosmos* die *Geschichte der physischen Weltanschauung* darstellen konnte. Ihm ging es dabei, wie er einmal an den Astronomen Bessel schrieb, nicht um die Geschichte einzelner Wissenschaften, sondern gerade um die „Erforschung der Veranlassungen, durch welche die einzelnen Zweige des Wissens sich verschmolzen und gegenseitig befruchtet haben“ ([9, 82]). Alexander von Humboldt war jedoch mehr mit den Geowissenschaften als mit den exakten Naturwissenschaften und der Mathematik vertraut. Für ihn blieben mathematische Theorien weitgehend unverständlich. Das gilt für den älteren Humboldt (also den, der den *Kosmos* schrieb) noch mehr als für den jüngeren. Und Humboldt verheimlichte dieses auch nicht. Er musste sich somit, um im *Kosmos* die Mathematikgeschichte soweit darzustellen, wie Mathematik für die Astronomie und Astronomie für die Mathematik wichtig waren, auf wissenschaftliche Untersuchungen anderer Gelehrter stützen. So orientierte sich Humboldt in der damals insgesamt noch recht lückenhaften Sekundärliteratur. Überdies holte er sich bei zeitgenössischen Gelehrten, die ebenfalls wissenschaftsgeschichtliche Interessen hatten, Rat; so beispielsweise beim Philologen August Boeckh, beim Astronomen Johann Gottfried Galle, beim Ägyptologen Karl Richard Lepsius.

Produktive Mathematiker haben (bis in die Gegenwart) nur ausnahmsweise direkt an der mathematikhistorischen Forschung mitgearbeitet. Zu den Ausnahmen zählt Jacobi. In zahlreichen Abhandlungen, Vorträgen, Manuskripten und Briefen Jacobis werden die langjährigen und tiefen Studien sichtbar, die er der Mathematikgeschichte gewidmet hat. Humboldt, der zu seinen „wichtigsten und eigenthümlichsten Arbeiten“ seine “Beobachtungen über den Geomagnetismus“ zählte ([2, 277–278]), zog schon im Jahre 1839 Jacobi bei theoretischen Problemen des Erdmagnetismus zu Rate. Die bei beiden Gelehrten gleichermaßen vorhandenen wissenschaftshistorischen Interessen waren es jedoch, denen wir die meisten Briefe ihrer Korrespondenz verdanken, in denen sie mit manchmal eigenwilligen, aber immer geistreichen Bemerkungen im Hinblick auf Humboldts *Kosmos* relevante Kapitel aus der Geschichte der Mathematik, Astronomie und Mechanik reflektierten: von den Ansichten der Pythagoreer und Platons über das Weltall, über das heliozentrische System des Aristarchos von Samos, die Epizykelmodelle (von Apollonios, Hipparchos und Ptolemaios), die Planetentheorie Keplers, das Gravitationsgesetz Newtons, die Himmelsmechanik von Laplace bis zu der im September 1846 gerade erfolgten Aufsehen erregenden Entdeckung des später Neptun benannten Planeten.

Humboldt betonte: „In mein Werk gehört nicht die Geschichte der Mathematik, aber leise Berührung des Aufkeimens der Gedankenfolge, ohne welche die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper, sei es in der Hypothese der Epicyclen oder in der der Massenanziehung, nicht hatten ergründet werden können“ ([23, 84]). Er stellte dementsprechend Fragen nach dem mathematischen Wissen der Pythagoreer, des Platon, des Aristoteles, der Alexandriner, nach der Geschichte der Kegelschnitte, nach der Bedeutung der Infinitesimalrechnung für die Himmelsmechanik, nach der Vervollkommnung der Analysis und – damit zusammenhängend – die Frage, worin sich Algebra und Analysis eigentlich unterscheiden.

Jacobis Antworten haben Humboldt zwar „mit Bewunderung erfüllt“, er habe sie „mit größtem Interesse studiert“, doch konnte er in seiner „Unwissenheit weniger Gewinn [daraus] ziehen, als es [Jacobi] Anstrengung gekostet“. Jacobis Mitteilungen wären „gefahrlos keiner stückweisen Benutzung fähig; [denn:] der Effect liegt in der Ideenverknüpfung“ ([23, Anhang 1, Briefe 23, 27]). Des Mathematikers Antworten wären zu allgemein gefasst, es wäre nicht möglich, sie im *Kosmos* zu zitieren, schrieb Humboldt an August Boeckh ([23, 126]). Während Jacobi eine Auswahl mathematik- und astronomiehistorischer Probleme analysierte, viele Einzelheiten interpretierte, beschrieb er nicht die für Humboldt so wichtige Synthese, stellte nicht die größeren Zusammenhänge dar. Allein eine Anaxagoras betreffende Äußerung Jacobis gab Humboldt im zweiten Band des *Kosmos* wieder. Kurz vor dem Druck der entsprechenden Bogen bat Humboldt am 1. September 1847 Jacobi noch um die Quellenangabe für die benutzte Passage. In diesem Zusammenhang wechselten Humboldt und Jacobi vier Briefe, in denen Jacobi noch einmal Interessantes zur Astronomie- und Mechanikgeschichte ausführte (siehe [23], [24]).

7 „Wer einmal [...] die Süßigkeit der mathematischen Ideen gekostet, kann nicht mehr davon lassen" (Jacobi): Jacobis Werk

In einem Brief an Alexander von Humboldt schrieb Jacobi einmal: „Ein Alter vergleicht die Mathematiker mit den Lotophagen [einem Volk, das sich von der Vergessen bringenden Frucht des Lotos nährt]. Wer einmal, sagt er, die Süßigkeit der mathematischen Ideen gekostet, kann nicht mehr davon ablassen" ([23, 112]).

Jacobi hat auf fast allen Gebieten der Mathematik „mit besonderer Liebe und dem seltensten Erfolge" ([8, II, 222]) geforscht und gelehrt.

In den Jahren 1827/1829 gab es den wunderbaren, unter Aufgebot aller Kräfte geführten mathematischen Wettstreit zwischen Jacobi und Niels Henrik Abel. Jacobi und Abel haben sich nie gesehen, nie miteinander korrespondiert ([25]). Ihren Wettkampf führten sie mit wissenschaftlichen Arbeiten, die vor allem in Schumachers *Astronomischen Nachrichten* und in Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik* erschienen. Abel und Jacobi kamen fast gleichzeitig und unabhängig voneinander auf die Idee, an Stelle elliptischer Integrale deren Umkehrfunktionen zu betrachten. Sie entdeckten die Doppelperiodizität dieser (elliptischen) Funktionen. Es ging um den Auf- und Ausbau der von ihnen initiierten Theorie der elliptischen Funktionen (vgl. [20]). Gauß war Beobachter des Wettkampfes. Er hatte viele Ergebnisse schon in den für ihn so ertragreichen Frühlingswochen des Jahres 1800 erhalten, aber nie veröffentlicht.

Jacobis Schöpfungen in der Theorie der elliptischen Funktionen, die „in Verbindung mit den gleichzeitigen Gedanken Abels eine unerwartete Erweiterung und die völlige Umgestaltung eines der wichtigsten Zweige der Analysis zur Folge" (Dirichlet, [7, 8]) hatten, sind als „Jacobis originellste Leistungen anzusehen" ([14, I, 109]).

Im Herbst 1828 begannen beide Forscher, ihre Erkenntnisse in Monographien zusammenzufassen. Im April 1829 lag Jacobis Buch *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* gedruckt vor. Legendre, der sich selbst seit 1786 mit der behandelten Thematik beschäftigt hatte, bewunderte und lobte Jacobis Meisterwerk. In einem Brief vom Frühjahr 1848 schrieb Jacobi ([31, Brief 10]) über eine seiner Formeln, dass sie „wohl das wichtigste und fruchtbarste ist, was [er] in reiner Mathematik erfunden habe". Es handelt sich um die Jacobische Tripelprodukt-Identität:

Sind q, z komplexe Zahlen, $z \neq 0$, $|q| < 1$, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^{2n} = C(q) \prod_{m=0}^{\infty} (1 + q^{2m+1} z^2)(1 + q^{2m+1} z^{-2}) \quad \text{mit } C(q) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m}).$$

Aus Jacobis Abhandlungen und Vorlesungen ist zu erkennen, was Jacobi im Auge hatte, als er die Einschätzung von der Wichtigkeit und Fruchtbarkeit seiner „Fundamentalformel" aussprach, nämlich ihre zahlreichen Anwendungen in der Zahlentheorie.

Den Gedanken, die Umkehrfunktionen zu betrachten, hat Jacobi auch auf hyperelliptische (Abelsche) Integrale angewendet. Er bewies, dass es keine Funktionen mit 3 Perioden geben kann, fand aber 4fach periodische Funktionen zweier Variablen. Mit Hilfe des Abelschen Theorems gelang es Jacobi, das genannte Umkehrproblem streng zu formulieren, seinen Nachfolgern, es zu lösen und so die Theorie der allgemeinen Thetafunktionen zu begründen. Die Theorie der algebraischen und Abelschen Funktionen und die Theorie der automorphen Funktionen, die beide aus den Arbeiten Jacobis hervorgegangen sind, gehörten zu den Hauptthemen der komplexen Funktionentheorie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Jacobi hat die Theorie der elliptischen Funktionen in der Geometrie, der analytischen Mechanik u.a. Gebieten, vor allem aber in der Zahlentheorie, angewendet. Jacobi entdeckte einen Zusammenhang zwischen dem Abelschen Theorem und gewissen diophantischen Gleichungen. Mit zahlentheoretischen Fragestellungen hat sich Jacobi immer wieder beschäftigt. Im aus der Kreisteilungstheorie entwickelten Kalkül der sog. Jacobischen Summen hat Jacobi (unabhängig von Cauchy) eine fruchtbare und anregende Methode für arithmetische Untersuchungen entwickelt. Schon 1827 konnte er als erste Anwendung das Reziprozitätsgesetz für kubische Reste aussprechen.

Jacobis Untersuchungen über die Kreisteilung und deren Anwendung auf die Zahlentheorie (insbesondere die Theorie der kubischen und biquadratischen Reste) sind nach Kummer „als der bedeutendste Fortschritt anzusehen, welcher in dieser Disziplin seit der Entstehung derselben … gemacht worden ist" (Kummer; [17, II, 702]).

Jacobis und Gauß' Arbeiten über höhere Reziprozitätsgesetze haben die algebraische Zahlentheorie eingeleitet, als deren Hauptaufgabe Kummer 1850 die Formulierung und den Beweis des Reziprozitätsgesetzes für beliebig hohe Potenzreste ansah. Diese Aufgabe wurde mit der im 20. Jahrhundert aufgestellten Klassenkörpertheorie gelöst.

Zu Jacobis wichtigsten Untersuchungen gehören jene über analytische Mechanik, die er im Anschluss an Lagrange und Hamilton ausbaute und die er nachhaltig beeinflusste. Es sei auch erinnert an die Anwendung elliptischer Funktionen auf die Theorie des Kreisels und auf die Berechnung der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid, an das Jacobi-Poissonsche Theorem, das für ein jedes mechanisches Differentialgleichungssystem lehrt, neue Integrale aus den bekannten (oder als schon bekannt vorausgesetzten) zu finden, an das Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung in der analytischen Mechanik.

Eng mit Jacobis Schaffen auf dem Gebiet der analytischen Mechanik hängt seine rechnerische Untersuchung der Störungen der Planentenbahnen zusammen. Seine Beiträge zur theoretischen Astronomie beziehen sich jedoch nicht nur auf die Bewegung, sondern auch auf die Gestalt der Himmelskörper. 1834 erzielte er das damals überraschende Resultat, dass die MacLaurinschen Ellipsoide nicht die einzigen möglichen Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten sind, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Als Frucht seiner Untersuchungen zur mathematischen Physik erzielte Jacobi auch wesentliche geometrische Resultate.

Es wären noch zahlreiche weitere mathematische Theorien und Theoreme aufzuzählen, die mit Jacobis Namen verbunden sind. Jacobis Werk umfasst zwei Bücher[12] und etwa 170 Abhandlungen. Auf Veranlassung der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften erschienen zwischen 1881 und 1891 Jacobis *Gesammelte Werke*[13].

Die Jacobische Vermutung, die Steve Smale[14] zu den 18 wichtigsten mathematischen Problemen des 21. Jahrhunderts zählt, geht nicht auf Jacobi, sondern auf Ott-Heinrich Keller zurück. Keller formulierte im Jahre 1939 das Umkehrproblem polynomialer Abbildungen, also das Funktionaldeterminantenproblem für Polynome („Eine polynomische Abbildung mit Funktionaldeterminante 1 ist invertierbar") als eine Vermutung über sogenannte ganze Cremona-Transformationen. Dabei spielt die Funktionaldeterminante eine Rolle, die ja meist als Jacobi-Determinante bezeichnet wird.[15]

Jacobi gehörte zusammen mit Gauß, Dirichlet und dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu den anerkannten Wegbereitern der mathematischen Forschung der folgenden Jahrzehnte. In einem Brief an Alexander von Humboldt schrieb Jacobi einmal über sich und die drei Kollegen: Dirichlet „allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger mathematischer Beweis ist, sondern wir kennen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist es ebenso viel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß, ich lasse mich auf diese Delicatessen lieber gar nicht ein" ([23, 99]). Felix Kleins Kommentar dazu: „Seiner rastlos vorwärtsdrängenden, abwechslungsbedürftigen Natur fehlte eben die Ruhe, die zur ebenmäßigen Vollendung des Baus nach allen Seiten nötig ist" ([14, I, 112]).

Jacobis Tod, „welcher ihn so früh und so plötzlich im Besitze seiner vollen Kraft von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft die großen Bereicherungen nicht gegönnt, die sie von Jacobi's nie ermüdender Thätigkeit noch erwarten durfte" (Dirichlet, [7, 217]).

Carl Friedrich Gauß schrieb nach Jacobis Tod (18. Februar 1851) an Alexander von Humboldt, dass er Jacobis „Stellung in der Wissenschaft stets für eine sehr hohe gehalten" ([3, 104]) hätte. Dieses Urteil gilt noch heute. Jacobis Ideen sind auch in der gegenwärtigen Mathematik, Physik und Astronomie noch lebendig und wirken dort weiter.

Im Folgenden soll ein Jacobisches Resultat noch etwas ausführlicher vorgestellt werden.

[12] *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (1829), *Canon arithmeticus* (1839).

[13] Bände 1 bis 7, Supplementband; separat erschienen Jacobis *Vorlesungen über Dynamik* (1866, herausgegeben von A. Clebsch), seine *Vorlesungen über analytische Mechanik Berlin 1847/48* (1996, herausgegeben von H. Pulte), sowie drei Bände in der Reihe Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (Bände 77, 78, 156). In Vorbereitung: Jacobis *Vorlesungen über Zahlentheorie Königsberg 1836/37* (herausgegeben von F. Lemmermeyer und H. Pieper).

[14] In: *Mathematical Intelligencer*, Vol. 20 (1998), Number 2.

[15] Siehe *Über die Functionaldeterminante* (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften; Band 78; 1896 herausgegeben von P. Stäckel). Es sei noch daran erinnert, dass die Bezeichnung „Determinante" durch eine fundamentale Arbeit Jacobis ([11, III, 355]) allgemein üblich geworden ist. Siehe auch: *Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten* (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften; Band 77; 1896 herausgegeben von P. Stäckel).

8 „... dieser Weg deucht mir noch der natürlichste zu sein, um zum Beweis ... zu gelangen“: Der Vierquadratesatz

Je nachdem, ob man nach der Darstellung als Summe von Quadraten gebrochener Zahlen oder als Summe von Quadraten natürlicher Zahlen oder nach der Anzahl solcher Darstellungen fragt, hat man drei Vierquadratesätze zu unterscheiden. Folgt man Archimedes, der einmal gesagt hat, dass derjenige, der einen Lehrsatz als erster ohne Beweis ausspricht, kein geringeres Verdienst hat, als derjenige, der als erster den Satz beweist, so sollten die drei Vierquadratesätze als *Satz von Diophant-Euler*, *Satz von Bachet-Lagrange* und *Satz von Jacobi* bezeichnet werden.

Satz von Diophant-Euler *Jede natürliche* (*bzw. gebrochene*) *Zahl ist Summe von höchstens* (*sogar: genau*) *vier Quadraten gebrochener Zahlen.*

Satz von Bachet-Lagrange *Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens vier Quadraten natürlicher Zahlen.*

Satz von Jacobi *Die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen*[16] *ist gleich*

$$\begin{aligned} 8\sigma_1(u), &\ \textit{wenn}\ \ n = u\ \ \textit{ungerade ist, bzw.} \\ 24\sigma_1(u), &\ \textit{wenn}\ \ n = 2^t u\ \ \textit{gerade ist}\ \ (t > 0, u\ \textit{ungerade}), \end{aligned}$$

wobei $\sigma_1(u)$ die Summe der positiven Teiler von u ist, einschließlich 1 *und u selbst.*

Diophant hat den Satz von Diophant-Euler in seinem Werk *Arithmetika*[17] an mehreren Stellen stillschweigend vorausgesetzt. Den Beweis hat Euler am 17. Juni 1751 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgetragen (Publikation in EV 242[18]/1760).

In Eulers Beweis werden folgende Aussagen benutzt:

Lemma 1

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2) = &(ae+bf+cg+dh)^2+(af-be-ch+dg)^2 \\ &+(ag+bh-ce-df)^2+(ah-bg+cf-de)^2. \end{aligned}$$

[16] Dabei gelten solche Darstellungen schon als verschieden, wenn die Zahlen vertauscht oder mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden.

[17] Von den 13 Kapiteln der *Arithmetika* kannte man lange Zeit nur 6, die in griechischen Handschriften vorliegen; 4 weitere in arabischer Übersetzung wurden erstmals (um 1974/75) von R. Rashed bzw. J. Sesiano erschlossen. Als Jacobi in Italien weilte, nutzte er den Aufenthalt in Rom zu Archivstudien in der Vatikanischen Bibliothek. Er interessierte sich für die drei dort befindlichen Codices, die Teile der *Arithmetika* des Diophant enthalten. Bachet hatte seiner Diophant-Ausgabe (1621) einen Pariser Codex zu Grunde gelegt und nur einen der drei Vatikanischen Codices zum Vergleich herangezogen. „Und somit wäre immer noch zu erwarten“, wie Nesselmann 1842 schrieb, dass, „wenn einmal Jemand sich der gewiß nicht unbelohnenden Mühe unterzöge, die drei Vaticanischen Codices gründlich mit der Bachetschen Ausgabe zu vergleichen, diese Arbeit für den Text des Diophantischen Werkes ein erwünschteres Resultat herbeiführen könnte“ ([19, 257]). Mit den Textvarianten, hervorgegangen aus seinen Römischen Archivstudien, füllte Jacobi 33 Octavblätter sowie den Rand seines Exemplars des Diophant. Er plante, die damals überlieferten Kapitel griechisch zu edieren. Für eine in den Handschriften verderbt überlieferte Stelle (V,12 Bachet = V, 9 Tannery) gab Jacobi nach sorgfältiger philologischer und mathematischer Untersuchung eine Emendation, die er am 5. August 1847 in der Berliner Akademie der Wissenschaften vortrug.

[18] Nummer im Eneström-Verzeichnis der Eulerschen Abhandlungen.

Bedeutet V_B eine Zahl, die eine Summe von höchstens vier Quadraten gebrochener Zahlen ist, so folgen aus dem Lemma 1

Korollar 1 *Wenn* $m = V_B$, $n = V_B$, *so auch* $mn = V_B$.

und

Korollar 2 *Wenn* $mn = V_B$ *und* $m = V_B$, *so* $n = V_B$.

Lemma 2 *Ist* p *eine Primzahl, so gibt es ganze Zahlen* u, v *derart, dass* p *ein Teiler von* $1 + u^2 + v^2$ *ist.*

Euler wollte den Satz von Bachet-Lagrange, den Bachet und später Fermat schon in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts vermutet hatten, dadurch beweisen, dass er versuchte anstelle des Korollars 2 zu Lemma 1 das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma 3 *Wenn* $mn = V$ *und* $m = V$, *so* $n = V$.

(Hierin bedeute V eine Zahl, die eine Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen ist). „Dies ist der Satz, worauf die ganze Sach beruhet, und den ich noch nicht beweisen kann", schrieb er im April 1749 an Goldbach ([12, 310]). Ein Beweis sollte Euler zunächst nicht gelingen (vgl. [26]). Es war Lagrange, der 1770 mit der Methode des unendlichen Abstiegs (Descente infinie) und mit Eulerschen Gedanken, die dieser in seinen Arbeiten über Zweiquadratsummen ausgesprochen hatte, die Bachetsche Vermutung zuerst beweisen konnte, indem er das folgende Lemma (bzw. eine Verallgemeinerung davon) bewies:

Lemma 4 *Ist eine Primzahl* p *Teiler einer Vierquadratesumme* V (*die vier Quadrate seien jedoch nicht alle durch* p *teilbar*), *so folgt* $p = V$.

Euler blieb nur übrig, (in der Arbeit EV 445) Lagranges Überlegungen zu vereinfachen. Er hatte aber noch eine andere Idee (die aus seiner Beschäftigung mit der Partitio numerorum hervorging), den Satz von Bachet-Lagrange zu beweisen. Man betrachte die formale Potenzreihe

$$f(q) = 1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \dots,$$

dann ist der Koeffizient von q^n der Potenzreihe

$$(f(q))^4 = 1 + aq + bq^2 + cq^3 + dq^4 + \dots$$

gerade die Anzahl, wie oft n als Summe von 4 Quadratzahlen (einschließlich 0) darstellbar ist. Um den Vierquadratesatz zu beweisen, ist somit nachzuweisen, dass alle Koeffizienten $a, b, c, d, \dots$ größer als 0 sind. Diese Beweisidee deutete Euler in Briefen an Goldbach und in einigen Arbeiten (wie EV 394, EV 586) an. So schrieb er im August 1750: „Dieser Weg deucht mir noch der natürlichste zu sein, um zum Beweis [...] zu gelangen" ([12, 330]).

Er wurde auf diese Weise zuerst vollständig von Jacobi unter Benutzung der Thetafunktion

$$\begin{aligned}\vartheta(\nu, q) &= \prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r})\prod_{r=1}^{\infty}(1+2q^{2r-1}\cos 2\pi\nu + q^{4r-2})\\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi\nu\\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^{2n}\end{aligned}$$

(mit $z = e^{\pi i\nu}$, $|q| < 1$) mit dem Nullwert ($\nu = 0$) $\theta = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots$ ausgeführt (indem θ^4 untersucht wird).

Beim Beweis des Vierquadratesatzes in den *Fundamenta nova* von 1829 wurde von Jacobi übrigens die Tripelprodukt-Identität verwendet. Jacobi publizierte zuerst ohne Beweis sein neues Resultat, nämlich den Anzahlsatz (Satz von Jacobi), gab darauf in einer anderen Note die dem Beweis zugrunde liegende Identität über θ^4 an, ehe er in den *Fundamenta* den Beweis derselben angab. Im Jahre 1834 konnte Jacobi überdies einen rein zahlentheoretischen Beweis des Anzahlsatzes (ohne Bezug auf die Formeln der *Fundamenta nova*) geben. Es gelang Jacobi aus seiner Tripelproduktidentität auch die folgende Formel

$$(1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\ldots)^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-11q^{15}+\ldots$$

zu beweisen. Diese wiederum führte ihn zu neuen zahlentheoretischen Erkenntnissen, darunter zu der Aussage, dass sich jede natürliche Zahl in der Form

$$x^2+2y^2+3z^2+6t^2$$

(mit ganzen Zahlen x, y, z, t) darstellen lässt. In Jacobis Ergebnis erkannte Liouville 1845 einen neuen Beweis des Vierquadratesatzes.

Literatur

[1] Ahrens, W. (Hrsg.): *Briefwechsel zwischen C.G.J. Jacobi und M.H. Jacobi*. Leipzig 1907.

[2] Biermann, K.-R.: Streiflichter auf geophysikalische Aktivitäten Alexander von Humboldts. *Gerlands Beiträge zur Geophysik* 80 (1971), 277–291.

[3] Biermann, K.-R. (Hrsg.): *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß*. Berlin 1977. (Beiträge zur Alexander-von-Humboldt-Forschung, Band 4.)

[4] Biermann, K.-R.: C.F. Gauß als Mathematik- und Astronomiehistoriker. *Historia Math.* 10 (1983), 422–434.

[5] Cantor, M.: Carl Gustav Jacob Jacobi. In: *Allgemeine deutsche Biographie*. Leipzig 1905, 50, 598–602.

[6] Courant, R.: Gauß und die gegenwärtige Situation der exakten Wissenschaften. In: R. Courant, R.W. Pohl: *Carl Friedrich Gauß. Zwei Vorträge*. Göttingen 1955, 13–27.

[7] Dirichlet, P.G.L.: Gedächtnisrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi. *J. Reine Angew. Math.* 52 (1856), 193–217. (Fotomechanischer Nachdruck in: Reichardt, H. (Hrsg.): *Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts*. Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 10, Leipzig 1988.)

[8] G. Lejeune Dirichlet's Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Preußischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. Fortgesetzt von L. Fuchs. Band I (1889), Band II (1897). Berlin.

[9] Felber, H.-J. (Hrsg.): *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Friedrich Wilhelm Bessel*. Berlin 1994. (Beiträge zur Alexander-von-Humboldt-Forschung, Band 10.)

[10] Harnack, A.: Geschichte der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Band 1 (in zwei Hälften), Band 2, Band 3 (O. Köhncke und K. Brodmann: Register über die in den Schriften der Akademie von 1700 bis 1899 erschienenen wissenschaftlichen Abhandlungen und Festreden). Berlin 1900.

[11] C.G.J. Jacobis Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften von C.W. Borchardt, K. Weierstraß und E. Lotter. Band I (1881), Band II (1882), Band III (1884), Band IV (1886), Band V (1890), Band VI (1891), Band VII (1891), Suppl.band (1884). Berlin.

[12] Juškevič, A.P.; Winter, E. (Hrsg.): *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729–1764*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Philosophie, Geschichte, Staats-, Rechts- und Wirtschaftswissenschaften, Jg. 1965 Nr.1.)

[13] Kaelter, R.: *Geschichte der jüdischen Gemeinde zu Potsdam*. Potsdam 1903.

[14] Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Teil 1 (1926), Teil 2 (1927). Berlin.

[15] Knobloch, E.; Pieper, H.; Pulte, H.: „… das Wesen der reinen Mathematik verherrlichen". Reine Mathematik und mathematische Naturphilosophie bei C.G.J. Jacobi. *Mathematische Semesterberichte* 42 (1995), 99–132.

[16] Koenigsberger, L.: *Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages*. Leipzig 1904.

[17] Ernst Eduard Kummer, Collected Papers. Edited by A. Weil. Vol. I (1975), Vol. II (1975). Berlin-Heidelberg-New York.

[18] Kusch, E.: *C.G.J. Jacobi und Helmholtz auf dem Gymnasium*. Ein Beitrag zur Geschichte des Victoria-Gymnasiums. In: Programm des Victoria-Gymnasiums zu Potsdam, Ostern. Potsdam 1896.

[19] Nesselmann, G.H.F.: *Die Algebra der Griechen*. Nach den Quellen bearbeitet. Berlin 1842.

[20] Pieper, H.: Abel und Jacobi gehören in der Geschichte der Mathematik zusammen wie Leibniz und Newton. (Zum 175. Jahrestag der Geburt von C.G.J. Jacobi.) In: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR*, Jg. 1980, Heft 2/3, 133–144.

[21] Pieper, H.: Jacobi in Berlin. In: Die Entwicklung Berlins als Wissenschaftszentrum (1870–1930). Beiträge einer Kolloquienreihe, Teil IV. Institut für Theorie, Geschichte und Organisation der Wissenschaft der Akademie der Wissenschaften der DDR. Berlin. Heft 30 (1982), 1–35.

[22] Pieper, H.: Jacobis Bemühungen um die Herausgabe Eulerscher Schriften und Briefe. *Wiss. Z. PH Erfurt-Mühlhausen, math.-naturwiss. Reihe* 20 (1984) 3, 78–98.

[23] Pieper, H. (Hrsg.): *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Gustav Jacob Jacobi*. Berlin 1987. (Beiträge zur Alexander-von-Humboldt-Forschung, Band 11.)

[24] Pieper, H.: Alexander von Humboldt zu astronomischen Problemen in seinem Briefwechsel mit dem Mathematiker Jacobi. *Die Sterne* 63 (1987), 93–102.

[25] Pieper, H.: Urteile C.G.J. Jacobis über den Mathematiker E.E. Kummer. *NTM* 25 (1988) 1, 23–36.

[26] Pieper, H.: On Euler's contributions to the four-squares-theorem. *Historia Math.* 20 (1993), 12–18.

[27] Pieper, H.: *Korrespondenz Adrien-Marie Legendre – Carl Gustav Jacob Jacobi. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi*. Mit einem Essay „C.G.J. Jacobi in Berlin". Stuttgart-Leipzig 1998. (Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 19.)

[28] Pieper, H.: *Netzwerk des Wissens und Diplomatie des Wohltuns. Berliner Mathematik, gefördert von A. v. Humboldt und C.F. Gauß*. Mit einem Geleitwort von E. Knobloch (Berlin). Leipzig 2004. (Gemeinschaftsausgabe Edition am Gutenbergplatz Leipzig/Alexander-von-Humboldt-Forschungsstelle Berlin.)

[29] Pieper, H.: Alexander von Humboldt und die Berufung Jacob Jacobis an die Wiener Universität. Zum 200. Jahrestag der Geburt des Mathematikers. *NTM* (*N.S.*), in Vorbereitung.

[30] Samter, N.: *Judentaufen im neunzehnten Jahrhundert*. Berlin 1906.

[31] Stäckel, P.; Ahrens, W. (Hrsg.): *Der Briefwechsel zwischen C.G.J. Jacobi und P.H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers*. Leipzig 1908.

Herbert Pieper
Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften
A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle
Jägerstr. 22/23
D-10117 Berlin, Deutschland
e-mail: pieper@bbaw.de