
Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2006 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Neue Aufgaben

Aufgabe 1221: Es seien f und g zwei reelle im Intervall $[a, b]$ differenzierbare Funktionen mit $f(x) > g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, und es sei c fest gewählt mit $0 < c < b - a$. Wir betrachten nun Flächen, die vom Graphen von f , vom Graphen von g und zwei zur y -Achse parallelen Geraden im Abstand c eingeschlossen werden.

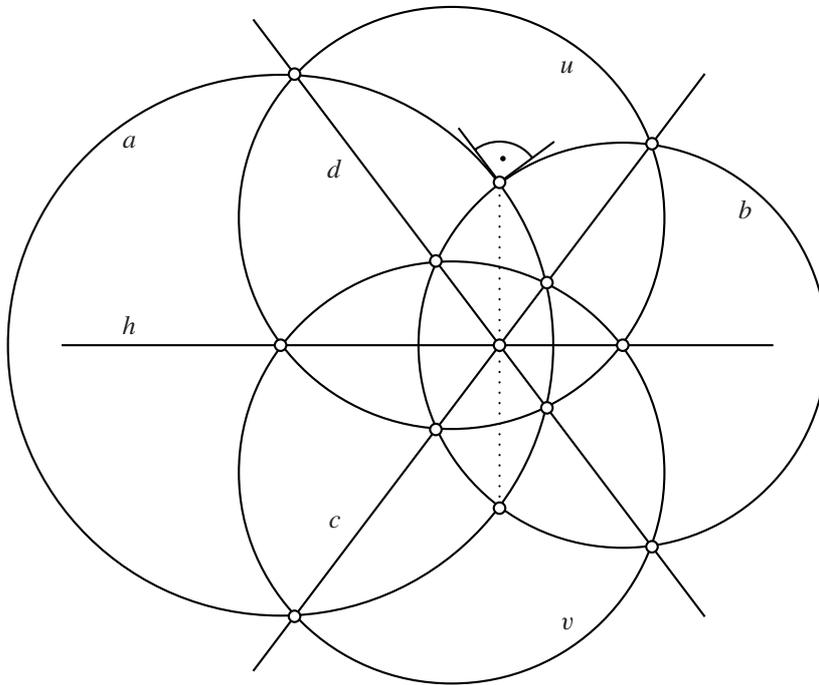
Was bedeutet es für den Inhalt einer solchen Fläche, wenn die Randstrecken auf den Parallelen gleich lang sind, und welche drei Fälle können dabei auftreten? Man finde auch ein Beispiel, bei welchem jeder Fall genau einmal auftritt, wobei die drei zugehörigen Flächen (inklusive Rand) paarweise disjunkt sein sollen.

Karl Wirth, Zürich, CH

Aufgabe 1222: Bestimme jene aus genau fünf Ziffern bestehenden Mengen M , die die Eigenschaft haben, dass die Aussage „Jede Quadratzahl 1, 4, 9, ... enthält mindestens eine Ziffer aus M “ wahr ist.

Peter Hohler, Aarburg, CH

Aufgabe 1223 (Die einfache dritte Aufgabe): Beweise die folgende Schliessungsfigur: Die Kreise a und b stehen zueinander senkrecht; die beiden Geraden c und d gehen durch den Mittelpunkt der gemeinsamen Sehne von a und b und liegen symmetrisch bezüglich der Zentralen h . Die Kreise u und v schneiden sich in den Zentren der Kreise a und b .



Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2004

Aufgabe 1209. Es seien ω_1, ω_2 von 0 verschiedene reelle Zahlen mit irrationalem Quotienten ω_1/ω_2 .

Beweis: Zu jedem $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ gibt es eine Folge $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ reeller Zahlen derart, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_1 \cdot \lambda_n) = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_2 \cdot \lambda_n) = y$.

Harald Merk, Biberach, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind sieben Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Zürich, CH) und Klaus Zacharias (Bergfelde, D)

Wir folgen der Lösung von *Stefan Grieder*, die weitgehend mit jener von *Jürgen Spilker* übereinstimmt: Es sei $x \in [-1, 1]$. Wir betrachten die Folge

$$a_\ell = \frac{\arcsin(x) + 2\ell\pi}{\omega_1}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $\sin(\omega_1 \cdot a_\ell) = x$, und der erste Grenzwert ist gesichert.

Es folgt $\omega_2 \cdot a_\ell = \underbrace{\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \arcsin(x)}_z + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot 2\ell\pi$. Wegen der Irrationalität von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ liegen die

Zahlen $\left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \ell \right\}$ ($\ell \in \mathbb{N}_0$) dicht im Intervall $[0, 1]$. Daraus folgt, dass die Zahlen

$$\omega_2 \cdot a_\ell \pmod{2\pi} = z + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \ell \cdot 2\pi \pmod{2\pi}$$

dicht im Intervall $[0, 2\pi]$ liegen. Also existiert zu gegebenem y eine Teilfolge $\lambda_n = a_{\ell_n}$, so dass

$$\sin(\omega_1 \lambda_n) = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_2 \lambda_n) = y.$$

Aufgabe 1210. Wir betrachten normierte selbstreziproke Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad n :

$$p(z) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell, \quad a_n = 1, \quad a_{n-\ell} = a_\ell \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Bestimme jene Polynome p , welche der Funktionalgleichung

$$p(1+z) + p(1-z) = p(z) + p(-z)$$

genügen und bei denen keine Nullstelle mit einer Nullstelle des selbstreziproken Polynoms $q(z) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + z^3 + z^2 - \frac{5}{2}z + 1$ übereinstimmt.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind neun Lösungen eingegangen, nämlich von Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Bernhard Ruh*: Das Polynom q besitzt die fünf Nullstellen

$$x_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = \frac{1}{2}.$$

Dabei sind x_1 und x_2 primitive sechste Einheitswurzeln, von denen zudem jede der Kehrwert der anderen ist:

$$x_1^6 = 1, \quad x_1^n \neq 1 \quad \text{für } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1}. \quad (1)$$

Ein Polynom p vom Grad n ist genau dann selbstreziprok, wenn es der Gleichung

$$p(z) = z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right) \quad (2)$$

genügt. Aus der verlangten Beziehung

$$p(1+z) + p(1-z) = p(z) + p(-z)$$

folgen durch fortgesetztes Einsetzen von $z = 0, 1, 2, \dots$ die Gleichheiten

$$p(0) = p(1), \quad p(-1) = p(2), \quad p(-2) = p(3), \dots$$

Weil die Eigenschaften einer Polynomfunktion durch endlich viele Punkte festgelegt sind, erfüllt p die Symmetrieeigenschaft

$$p\left(\frac{1}{2} + z\right) = p\left(\frac{1}{2} - z\right) \quad \text{bzw.} \quad p(z) = p(1-z). \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt $p(x_1) = x_1^n \cdot p(x_2)$, und aus (3) folgt $p(x_1) = p(x_2)$. Zusammen bedeutet das

$$p(x_1) = x_1^n \cdot p(x_1),$$

woraus aus (1) und wegen der gestellten Forderung $p(x_1) \neq 0$ folgt, dass der Grad n des Polynoms p ein ganzzahliges Vielfaches von 6 sein muss.

Ist $w_1 = w$ eine Nullstelle von p , so sind wegen (2) und (3) auch

$$w_2 = \frac{1}{w}, \quad w_3 = 1-w, \quad w_4 = \frac{w-1}{w}, \quad w_5 = \frac{1}{1-w}, \quad w_6 = \frac{w}{w-1}$$

Nullstellen von p . Weitere Nullstellen treten nicht auf, weil die beiden Abbildungen $z \mapsto \frac{1}{z}$ und $z \mapsto 1-z$ eine zur Diedergruppe \mathcal{D}_3 isomorphe Gruppe der Ordnung 6 erzeugen.

Ist w_1 keine Nullstelle von q , so sind auch w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 keine Nullstellen von q . Die Bedingung, dass w_1 nicht Nullstelle von q ist, ist notwendig und hinreichend dafür, dass die sechs Nullstellen w_i paarweise verschieden sind.

Somit haben die gesuchten Polynome die Teiler $\prod_{j=1}^6 (z - w_j)$, wobei die Bedingung

$$w_1 \notin \left\{ \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 2, \frac{1}{2} \right\} \cup \{0, 1\}$$

gelten muss. Mit dem Satz von Vieta erhält man für dieses Produkt

$$z^6 - 3z^5 + az^4 + (5-2a)z^3 + az^2 - 3z + 1, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}, 6 \right\}.$$

Die gesuchten Polynome sind also genau die Produkte der Art

$$\prod_{\ell} \left(z^6 - 3z^5 + a_{\ell}z^4 + (5-2a_{\ell})z^3 + a_{\ell}z^2 - 3z + 1 \right), \quad a_{\ell} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}, 6 \right\}.$$

Aufgabe 1211 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Quersumme einer Dezimalzahl ≥ 10 ist kleiner als diese Zahl. Beweise ein analoges Resultat für die höheren Potenzen: Es sei

$k > 1$. Für die Zahl n mit der Dezimaldarstellung $n = \sum_{\ell=0}^N z_{\ell} \cdot 10^{\ell}$ definiert man die

verallgemeinerte Quersumme $q_n^{(k)} := \sum_{\ell=0}^N z_{\ell}^k$. Beweise, dass $q_n^{(k)} < n$ für $n \geq (k-1) \cdot 10^k$.

Wie lässt sich die Aussage verallgemeinern, wenn man die Zifferndarstellung zu einer beliebigen Basis $g \geq 2$ verwendet?

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind fünf Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A).

Wir folgen *Stefan Grieder*: Es sei $g \geq 2$, und n sei eine $N+1$ -stellige Zahl bezüglich der Basis g :

$$n = \sum_{\ell=0}^N z_{\ell} g^{\ell}, \quad \text{wobei} \quad 0 \leq z_{\ell} \leq g-1 \quad (0 \leq \ell \leq N-1) \quad \text{und} \quad 0 < z_N \leq g-1.$$

Es sei $q_g^{(k)}(n) = \sum_{\ell=0}^N z_{\ell}^k$ die verallgemeinerte Quersumme der Zahl n .

Wir zeigen: Ist $k = 1$ und $n \geq g$ oder $k \geq 2$ und $n \geq (k-1)g^k$, dann gilt $n > q_g^{(k)}(n)$.

- Es sei zuerst $k = 1$ und $n \geq g$. Dann gilt

$$n - q_g^{(1)}(n) = \sum_{\ell=0}^N z_{\ell} g^{\ell} - z_{\ell} = \sum_{\ell=1}^N z_{\ell} (g^{\ell} - 1) > 0,$$

weil wegen $N \geq 1$ die Summe nicht leer und wegen $z_N > 0$ positiv ist.

- Es sei $k \geq 2$, $g \geq 2$ und $n \geq (k-1)g^k$. Aus der letzten Bedingung folgt $N \geq k$, denn die Zahl n ist mindestens $k+1$ -stellig. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $N > k$: Die Zahl n ist mindestens $k+2$ -stellig. Wir verkleinern n und nehmen nur die erste Ziffer, die wir als $z_N = 1$ annehmen, während wir $q_g^{(k)}(n)$ vergrößern, indem wir annehmen, dass alle Ziffern gleich $g-1$ sind. Es gilt dann

$$\begin{aligned} n - q_g^{(k)}(n) &> g^N - (N+1)(g-1)^k \\ &= ((g-1)+1)^N - (N+1)(g-1)^k \\ &> (g-1)^N + N(g-1)^{N-1} - (N+1)(g-1)^k \\ &= (N+g-1)(g-1)^{N-1} - (N+1)(g-1)^k \geq 0. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass $N+g-1 \geq N+1$ und dass $N-1 \geq k$ ist. In der zweitletzten Zeile wurden nur die ersten beiden der mindestens vier Summanden der Binomialreihe für $((g-1)+1)^N$ benützt.

- $N = k$: Aus $n \geq (k-1)g^k$ folgt $z_k \geq k-1$. In diesem Fall benützen wir für n nur die ersten zwei Ziffern, während wir wie im ersten Fall alle Ziffern von $q_g^{(k)}(n)$ durch $g-1$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
 n - q_g^{(k)}(n) &> z_k g^k + z_{k-1} g^{k-1} - \left(z_k^k + z_{k-1}^k + (k-1)(g-1)^k \right) \\
 &= z_k ((g-1) + 1)^k + z_{k-1} g^{k-1} + \dots \\
 &\quad - z_k^k - z_{k-1}^k - (k-1)(g-1)^k \\
 &> z_k (g-1)^k + z_k k (g-1)^{k-1} + z_{k-1} g^{k-1} + \dots \\
 &\quad - z_k^k - z_{k-1}^k - (k-1)(g-1)^k \\
 &= z_k \overbrace{\left(k(g-1)^{k-1} - z_k^{k-1} \right)}^{>0} + z_{k-1} \overbrace{\left(g^{k-1} - z_{k-1}^{k-1} \right)}^{>0} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{(z_k - (k-1))}_{\geq 0} (g-1)^k \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Wiederum wurden bei der zweiten Abschätzung nur die ersten beiden Summanden der Binomialentwicklung berücksichtigt.

Nachtrag: In den Löserlisten im Heft 2 sind Hans Egli (Zürich, CH) und Beat Schweingruber (Zürich, CH) vergessen gegangen; Hans Egli hat Aufgabe 1208 gelöst, Beat Schweingruber hat alle drei Aufgaben gelöst.