
Einige Anmerkungen zum Fortsetzungssatz von Tietze

Raymond Mortini

Raymond Mortini, geboren in Luxemburg, promovierte 1984 im Fach Mathematik an der Universität Karlsruhe, vier Jahre später folgte die Habilitation. Nach einer ausserplanmässigen Professur in Karlsruhe wurde er im Jahr 1995 auf eine ordentliche Professur an der Université de Metz berufen. Seine Arbeitsgebiete umfassen Funktionentheorie, Funktionalanalysis und Operatorentheorie. Dabei gilt sein Hauptinteresse den Räumen analytischer Funktionen und ihren Operatoren sowie uniformen Algebren.

In jeder einführenden Vorlesung in die mengentheoretische Topologie begegnet man dem Lemma von Urysohn und dem Fortsetzungssatz von Tietze.

Definition. *Ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A und B zwei disjunkte offene Obermengen U und V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$, heisst T4-Raum.*

Lemma von Urysohn. *Es sei X ein T4-Raum. Dann gibt es eine auf X stetige Funktion f mit $f(X) \subseteq [0, 1]$ sowie $f \equiv 0$ auf A und $f \equiv 1$ auf B . Umgekehrt ist diese Existenzeigenschaft auch charakteristisch für T4-Räume.*

Satz von Tietze. *Es sei X ein T4-Raum. Dann besitzt jede auf einem abgeschlossenen Teilraum A von X stetige Funktion mit Werten in $[0, 1]$ eine stetige Fortsetzung auf X mit demselben Wertebereich $[0, 1]$. Umgekehrt ist diese Fortsetzungseigenschaft charakteristisch für T4-Räume.*

Kaum eine Topologievorlesung kommt ohne die Sätze von Urysohn und Tietze aus. Diese ermöglichen, in Räumen, welche die T4-Trennungseigenschaft besitzen (d. h. in denen disjunkte, abgeschlossene Mengen durch offene Mengen getrennt werden können), gewisse stetige Funktionen fortzusetzen. Der Satz von Tietze behandelt folgende Eigenschaft, welche T4-Räume X charakterisiert: Jede stetige Funktion $f : A \rightarrow [0, 1]$ auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ besitzt eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow [0, 1]$. Bleibt diese Fortsetzungseigenschaft bestehen, wenn man den Wertebereich $[0, 1]$ durch $[0, 1]$, $[0, \infty[$ oder $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ersetzt? Für kompakte Wertebereiche $K \subseteq \mathbb{C}$ wird diese Frage bejaht, wenn K ein sogenannter Retrakt ist. Damit ist ein Anknüpfungspunkt zum Satz von Borsuk gefunden, welcher Retrakte charakterisiert.

Unter Verwendung der Abbildung $\varphi(s) = a + s(b - a)$, welche $[0, 1]$ homöomorph auf $[a, b]$ abbildet ($a < b$), ergibt sich sofort, dass man $[0, 1]$ durch ein beliebiges kompaktes Intervall $[a, b]$ ersetzen kann. Eine Antwort auf folgende Frage findet man jedoch selten in den entsprechenden Vorlesungen: Bleibt die obige Aussage im Satz von Tietze noch gültig, wenn man $[0, 1]$ zum Beispiel durch $[0, 1[$, $[0, \infty[$ oder $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ersetzt? Im folgenden werden wir diese Fragen bejahen. Die Ergebnisse werden sich als Korollar zum Satz von Tietze ergeben. Weisen wir noch daraufhin, dass sich im Falle eines metrischen Raums (X, d) die Aussage im Lemma von Urysohn sehr einfach beweisen lässt: Als f wähle man $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$, wobei $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ die Abstandsfunktion bezeichnet.

Für weiterführende Ergebnisse, deren Anfänge auf K. Borsuk zurückgehen, und die den Beginn einer neuen Ära in der (geometrischen) Topologie einleiteten, verweisen wir z.B. auf die Bücher von Borsuk [1] sowie Engelking und Sieklucki [4]. Zahlreiche Anwendungen (und Erweiterungen) findet man in verschiedenen Zweigen der Theorie der Banachalgebren, sowie der nichtlinearen Analysis (vgl. [6]).

1 Reeller Wertebereich

Proposition 1. *Es sei X ein T4-Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \rightarrow [0, 1[$ stetig. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow [0, 1[$.*

Beweis. Gemäss dem Satz von Tietze wählen wir eine stetige Fortsetzung f^* von f mit $f^* : X \rightarrow [0, 1]$. Es sei $E = \{x \in X : f^*(x) = 1\}$. Dann ist E abgeschlossen und $E \cap A = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert $g \in C(X)$ mit $g(X) \subseteq [0, 1]$, so dass $g \equiv 1$ auf A ist und $g \equiv 0$ auf E ist. Wir setzen $F = gf^*$. Dann ist F eine stetige Fortsetzung von f . Offenbar gilt jedoch auch, dass $F(X) \subseteq [0, 1[$, denn für $x \in E$ ist $F(x) = 0$ und für $x \in X \setminus E$ ist $0 \leq F(x) = f^*(x)g(x) \leq f^*(x) < 1$. \square

Korollar. *Es sei X ein T4-Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \rightarrow [0, \infty[$ stetig. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow [0, \infty[$.*

Beweis. Betrachte einen Homöomorphismus $\varphi : [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$, gegeben z.B. durch $\varphi(x) = \frac{x}{x+1}$. Dann erfüllt die Funktion $h = \varphi \circ f : A \rightarrow [0, 1[$ die Voraussetzung von Proposition 1 und besitzt demnach eine stetige Fortsetzung H mit $H(X) \subseteq [0, 1[$. Sodann ist $F = \varphi^{-1} \circ H$ die gewünschte Fortsetzung von f mit $F(X) \subseteq [0, \infty[$. \square

Mit ähnlichen Überlegungen kann man zeigen, dass auch die Intervalle $]a, b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ zulässige Wertebereiche sind. Da umgekehrt die Wertemenge einer stetigen Funktion auf einem zusammenhängenden topologischen Raum, wie zum Beispiel \mathbb{R} selbst, zusammenhängend ist, haben wir damit alle reellen Wertebereiche gefunden, welche Tietze-Fortsetzungen erlauben: es sind genau die Intervalle I in \mathbb{R} . Vermerken wir auch noch, dass X notwendigerweise ein T4-Raum sein muss, da die Urbilder (relativ offener) disjunkter Teilmengen von I bezüglich stetiger Abbildungen wieder offen und disjunkt sind; als stetige Funktion wähle man hier eine Tietze-Fortsetzung F der Funktion, welche den Wert α_j auf A_j ($j = 1, 2$) annimmt, $\alpha_j \in I$ (dabei sind A_j die zu trennenden disjunkten abgeschlossenen Teilmengen von X).

Folgendes „Sandwichtheorem“ kann man nun ableiten:

Proposition 2. *Es sei X ein T4-Raum, $g, h \in C(X)$ mit $g \leq h$ und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge von X . Dann besitzt jede auf A stetige Funktion f mit $g \leq f \leq h$ eine stetige Fortsetzung F mit $g \leq F \leq h$.*

Beweis. Zuerst beachte man, dass die Funktion $h - f$ ihre Werte in $[0, \infty[$ hat. Gemäss dem obigen Korollar existiert eine auf X stetige Funktion H mit $H = h - f$ auf A und $H(X) \subseteq [0, \infty[$. Wir setzen $H^* = h - H$. Dann ist $H^* = f$ auf A sowie $H^* \leq h$ auf X . Die Funktion $F = \max\{H^*, g\}$ ist nun wegen $g \leq f$ auf A die gewünschte Fortsetzung von f mit $g \leq F \leq h$. \square

2 Komplexer Wertebereich

Im folgenden bezeichne $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene und $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Als Korollar zur Proposition 2 erhalten wir nun den wichtigen Fall, dass auch Kreisscheiben als zulässige Wertemengen erlaubt sind. Wir vermerken, dass dieser Fall eine wohlbekannte Aussage aus der Theorie der Peak-Interpolationsmengen in uniformen Algebren ist (siehe z.B. [5, S. 52]).

Proposition 3. *Es sei X ein T4-Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ stetig. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$.*

Beweis. Es ist $f = u + iv$, wobei u und v stetige, reellwertige Funktionen auf A sind, welche der Bedingung $u^2 + v^2 \leq 1$ genügen. Insbesondere gilt $-1 \leq v \leq 1$. Es sei V eine stetige Fortsetzung von v auf X mit Werten in $[-1, 1]$. Offenbar genügt u auf A der Ungleichung $-\sqrt{1 - v^2} \leq u \leq \sqrt{1 - v^2}$. Gemäss Proposition 2 existiert auf X eine stetige Fortsetzung U von u mit $-\sqrt{1 - V^2} \leq U \leq \sqrt{1 - V^2}$. Die Funktion $F := U + iV$ ist nun die gesuchte stetige Fortsetzung von f mit Werten in $\overline{\mathbb{D}}$. \square

Eine andere Beweismöglichkeit bestünde darin, die Funktionen u und v gemäss dem Satz von Tietze zu Funktionen U und V fortzusetzen und dann den Ausdruck

$$\frac{U + iV}{\max\{\sqrt{U^2 + V^2}, 1\}}$$

zu betrachten.

Im folgenden beschränken wir uns nun auf kompakte, mindestens zwei Punkte enthaltende, Wertebereiche $K \subseteq \mathbb{C}$. Die natürliche Frage, die sich jetzt aufdrängt, ist die nach der Struktur derjenigen K , für welche jede auf $A \subseteq X$ stetige Funktion mit Wertebereich K eine stetige Fortsetzung auf X mit demselben Wertebereich besitzt.

Definition. Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ heisse *Retrakt*, wenn die Identität auf K eine stetige Fortsetzung auf \mathbb{C} mit demselben Wertebereich besitzt.

Proposition 4. *Es sei X ein T4-Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge von X , $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Retrakt, und $f : A \rightarrow K$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung F auf X mit $F(X) \subseteq K$.*

Beweis. Es sei $r > 0$ so gewählt, dass $K \subseteq r\overline{\mathbb{D}}$. Gemäss Proposition 3 existiert ein stetiges $f^* : X \rightarrow r\overline{\mathbb{D}}$ mit $f^*|_A = f$. Es sei $I_K : \mathbb{C} \rightarrow K$ eine zu K assoziierte Retraktionsabbildung, d.h. eine stetige Abbildung mit $I_K(z) = z$ für $z \in K$. Dann leistet die Funktion $F = I_K \circ f^*$ das Gewünschte. \square

Wir können uns demnach auf $X = \mathbb{C}$ und $A = K$ beschränken. Wann ist also K ein Retrakt? Eine vollständige Lösung hierzu gab K. Borsuk (siehe z.B. [1]). Zunächst bemerken wir, dass K notwendigerweise ein lokal (bogen)zusammenhängendes Kontinuum sein muss. Tieferliegend ist nun die Tatsache, dass K ein zusammenhängendes Komplement haben muss. Dies ist, wie wir jetzt sehen werden, eine Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Brouwer (siehe z.B. [4, S. 127] oder [2, S. 109]).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $K \subseteq \frac{1}{2}\overline{\mathbb{D}}$. Nehmen wir an, dass $\mathbb{C} \setminus K$ nicht zusammenhängend wäre. Es sei, wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit, 0 in einer der beschränkten (offenen) Zusammenhangskomponenten C von $\mathbb{C} \setminus K$ gelegen. Wir setzen $g(z) = z$ falls $z \notin C$ und $g(z) = I_K(z)$ falls $z \in C$. Dann ist g stetig und nullstellenfrei. Sodann ist $G(z) = -\frac{g(z)}{|g(z)|}$ eine stetige unimodulare Funktion auf $\overline{\mathbb{D}}$. Für $|z| = 1$ gilt $G(z) = -z$. Somit hat G keinen Fixpunkt auf $\overline{\mathbb{D}}$, im Widerspruch zum Fixpunktsatz von Brouwer. Damit haben wir gezeigt, dass jeder Retrakt ein zusammenhängendes Komplement haben muss. Interessant ist nun die Umkehrung:

Satz von Borsuk. *Ein Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann ein Retrakt, wenn K ein lokal (bogen)zusammenhängendes Kontinuum mit zusammenhängendem Komplement ist.*

Auf den technisch schwierigen Beweis müssen wir hier verzichten und verweisen den Leser auf [1, S. 132ff, 103].

Diejenigen, welche sich für vektorwertige Wertebereiche interessieren, verweisen wir auf die Original-Arbeit von J. Dugundji [3], welcher eine Verallgemeinerung des Fortsetzungssatzes von Tietze mit Werten in lokal konvexen topologischen Vektorräumen bewies.

Literatur

- [1] Borsuk, K.: *Theory of Retracts*. Polish Sci. Publ., Warszawa 1967.
- [2] Burckel, R.: *An Introduction to Classical Complex Analysis*. Birkhäuser Verlag, Basel 1979.
- [3] Dugundji, J.: An extension of Tietze's theorem. *Pacific J. Math.* 1 (1951), 353–367.
- [4] Engelking, R.; Sieklucki, K.: *Topology. A Geometric Approach*. Helderman Verlag, Berlin 1992.
- [5] Stout, E.: *The theory of uniform algebras*. Bogden and Quigley Inc., Belmont 1971.
- [6] Vähä, M.: Einige topologische Methoden in der nichtlinearen Analysis. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 106 (2004), 129–147.

Raymond Mortini
 Département de Mathématiques
 Université de Metz
 Ile du Saulcy
 F-57045 Metz, France
 e-mail: mortini@poncelet.univ-metz.fr