
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2006 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1230: Leitet man aus einer Zufallsvariablen X weitere Zufallsvariablen $Y_1 := f_1(X)$, $Y_2 := f_2(X)$, ... ab, so sind diese im Allgemeinen abhängig.

- Es sei $\ell \geq 2$. Man finde eine Zufallsvariable X und Funktionen f_1, \dots, f_ℓ , für welche die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_ℓ unabhängig sind.
- Gesucht sind eine \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable X und eine Folge von Funktionen $f_1, f_2, \dots: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Zufallsvariablen $Y_1 := f_1(X)$, $Y_2 := f_2(X)$, ... unabhängig sind.

Um Trivialbeispiele auszuschliessen, setze man in beiden Aufgabenteilen zusätzlich voraus, dass die abgeleiteten Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant sind.

Werner Schindler, Sinzig, D

Aufgabe 1231: Welche minimale Anzahl $a(n)$ von Sitzordnungen bei $n = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) Personen in einer Reihe gewährleistet, dass jede der n Personen genau einmal neben jeder anderen gesessen hat? Man gebe auch eine Konstruktionsvorschrift der dazu erforderlichen Sitzordnungen an.

Caroline Ryser, Langenbruck, CH und Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1232 (Die einfache dritte Aufgabe): Beweise: Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks gilt

$$0 < \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hans Egli, Zürich, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2005

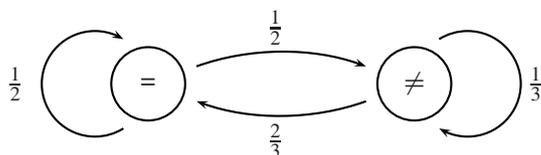
Aufgabe 1218. Alice und Bruno haben beide je einen Einfränkler und einen Zweifränkler in ihren Hosentaschen. Beide klauben (wirklich) zufällig je eine Münze heraus und zeigen sie einander vor. Haben die vorgezeigten Münzen den gleichen Wert, wandert das Geld in die Taschen der beiden zurück; haben die Münzen verschiedene Werte, so wandern beide Münzen in die Tasche derjenigen Person, welche den Zweifränkler vorgezeigt hat. Dann kann mit der neuen Ausgangslage nach denselben Regeln eine weitere Runde gespielt werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kinder nach n Runden den gleichen Geldbetrag in ihren Taschen, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alice nach n Runden einen grösseren Betrag als Bruno, und gegen welche Werte streben diese Wahrscheinlichkeiten für $n \rightarrow \infty$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), André Calame (Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Josef Züger (Bonaduz, CH),

Fast alle Löser studieren die Übergangsmatrix der Markow-Kette, welche beschreibt, wie die drei Zustände des Spiels ineinander übergehen. Anschliessend wird entweder eine Rekursion aufgelöst oder es wird mittels Diagonalisierung die Matrix potenziert. Wir folgen den Überlegungen von *Josef Züger*, der mit nur zwei Zuständen arbeitet: Es bezeichne p_n die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kinder nach n Runden den gleichen Geldbetrag in den Taschen haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach n Runden verschiedene Geldbeträge besitzen, ist somit $1 - p_n$. Das Spiel stellt sich mit den Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt dar:



Es ergibt sich also folgende rekursive Darstellung:

$$p_0 = 1,$$

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{2} + (1 - p_n) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot p_n, \quad (n \geq 0).$$

Die Rekursion lässt sich mit Standardmethoden auflösen; man erhält die explizite Darstellung

$$p_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bruno nach n Runden verschiedene Beträge in den Taschen haben, beträgt demnach $1 - p_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n$, und aus Symmetriegründen ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice einen grösseren Betrag als Bruno besitzt,

$$q_n = \frac{1}{2} \cdot (1 - p_n) = \frac{3}{14} - \frac{3}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

Die beiden gesuchten Grenzwerte betragen somit $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{14}$.

Aufgabe 1219. Im ebenen Gitter betrachten wir Minimalwege von $(0, 0)$ nach (n, n) , welche mit dem Schritt $(1, 0)$ starten und die Gerade $y = x$ genau k Mal überqueren. Man bestimme für $k = 1, 2, 3$ deren Anzahl $a(n, k)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Zuschriften eingetroffen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Mehreren Lösern gelingt es, die Aufgabe mit Hilfe des so genannten Spiegelungsprinzipes für alle Werte von k ($0 \leq k < n$) zu lösen. Wir folgen *Stefan Grieder*, in dessen Lösung dieses Prinzip ausführlich erläutert wird: Wir behaupten, dass die Anzahl der Minimalwege von $(0, 0)$ über $(1, 0)$ nach (n, n) , die die Gerade $y = x$ *mindestens* k Mal überqueren, gleich der Anzahl der Minimalwege von $(0, 0)$ über $(1, 0)$ nach $(n - k, n + k)$ ist. Die letztere Anzahl ist gegeben durch

$$\binom{2n - 1}{n + k},$$

da man von $(1, 0)$ ausgehend für die zurückzulegenden $2n - 1$ Schritte sich $n + k$ Mal für den Schritt $\uparrow = (0, 1)$ (und $n - 1 - k$ Mal für den Schritt $\rightarrow = (1, 0)$) entscheiden muss, um nach $(n - k, n + k)$ zu gelangen.

Die gesuchte Anzahl Wege $a(n, k)$ ergibt sich dann als Differenz der Anzahl Wege, welche die Gerade $y = x$ mindestens k Mal und jener, welche diese Gerade mindestens $k + 1$ Mal überqueren:

$$a(n, k) = \binom{2n - 1}{n + k} - \binom{2n - 1}{n + k + 1} = \frac{k + 1}{n} \binom{2n}{n + k + 1}.$$

- Gegeben sei ein minimaler Weg ω von $(0, 0)$ nach (n, n) , der die Gerade $y = x$ mindestens k Mal überquert. Wir konstruieren daraus einen minimalen Weg $\Phi(\omega)$ von $(0, 0)$ nach $(n - k, n + k)$. Dazu betrachten wir die „obere Nebendiagonale“ $o : y = x + 1$ und die „untere Nebendiagonale“ $u : y = x - 1$.

Wir teilen den Weg ω wie folgt in $k + 1$ nichtleere Abschnitte $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1} : \omega_1$ ist der Weg vom Ausgangspunkt bis zum ersten Auftreffen auf o (1. Überqueren von

$y = x$). ω_2 ist der Weg von hier aus bis zum nächsten Auftreffen auf u (2. Überqueren von $y = x$), ω_3 von hier aus bis zum nächsten Auftreffen auf o (3. Überqueren von $y = x$), usw. Der letzte Weg ω_{k+1} ist der Weg vom Endpunkt von ω_k bis zu (n, n) .

Den Weg $\bar{\omega} = \Phi(\omega)$ erhält man aus ω , wenn man die Schritte in den Wegen $\omega_2, \omega_4, \dots$ „umkehrt“, d.h. jeden Schritt \uparrow durch \rightarrow ersetzt und umgekehrt. Man beachte, dass die Wege $\omega_2, \omega_4, \dots$ (mit Ausnahme des letzten bei ungeradem k) alle von der Geraden o zur Geraden u führen. Sie enthalten also zwei Schritte \rightarrow mehr als Schritte \uparrow (im erwähnten Ausnahmefall nur 1 Schritt \rightarrow mehr als \uparrow). Durch das Vertauschen der Schritte in $\omega_2, \omega_4, \dots$ erhält man im Weg $\Phi(\omega)$ (in allen Fällen) insgesamt k Schritte \uparrow mehr als im Weg ω ; daher führt der Weg $\Phi(\omega)$ von $(0, 0)$ nach $(n - k, n + k)$.

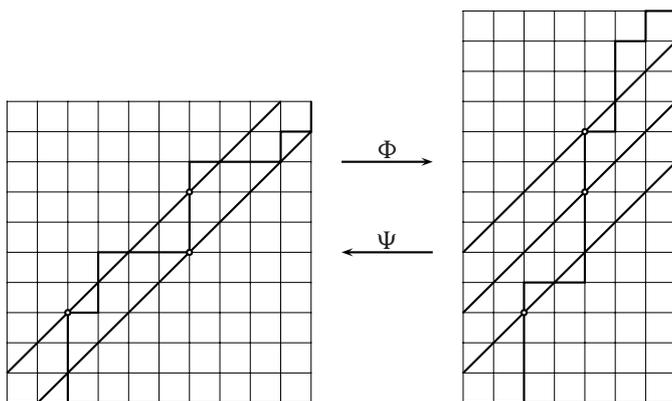
- Sei $\bar{\omega}$ ein minimaler Weg von $(0, 0)$ nach $(n - k, n + k)$. Wir konstruieren daraus einen minimalen Weg $\Psi(\bar{\omega})$ von $(0, 0)$ nach (n, n) , der die Gerade $y = x$ mindestens k Mal überquert.

Wie oben teilen wir den Weg $\bar{\omega}$ in $k + 1$ Abschnitte. Der Weg $\bar{\omega}_1$ ist der Weg vom Ausgangspunkt bis zum ersten Auftreffen auf die Gerade $o : y = x + 1$. Der Weg $\bar{\omega}_2$ führt von hier aus bis zum ersten Auftreffen auf die Gerade $y = x + 3$; $\bar{\omega}_3$ führt von hier aus bis zum ersten Auftreffen auf $y = x + 5$, usw. Der letzte Weg $\bar{\omega}_{k+1}$ ist der Weg vom ersten Auftreffen auf die Gerade $y = x + 2k - 1$ bis zum Endpunkt $(n - k, n + k)$, der auf der Geraden $y = x + 2k$ liegt.

Wiederum erhält man den Weg $\Psi(\bar{\omega})$ aus $\bar{\omega}$, indem man die Schritte in den Wegen $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_4, \dots$ „umkehrt“. Alle Wege $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \dots$ (mit Ausnahme des letzten bei ungeradem k) enthalten 2 Schritte \uparrow mehr als \rightarrow (im erwähnten Ausnahmefall nur 1 Schritt \uparrow mehr als \rightarrow). Durch das Vertauschen der Schritte in $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_4, \dots$ erhält man im Weg $\Psi(\bar{\omega})$ (in allen Fällen) insgesamt k Schritte \rightarrow mehr als im Weg $\bar{\omega}$, daher führt der Weg $\omega = \Psi(\bar{\omega})$ von $(0, 0)$ nach (n, n) .

- Man prüft leicht nach, dass die Funktionen Φ und Ψ zueinander invers sind.

Beispiel mit $n = 10$ und $k = 3$. Die Abschnitte sind durch die markierten Punkte gekennzeichnet.

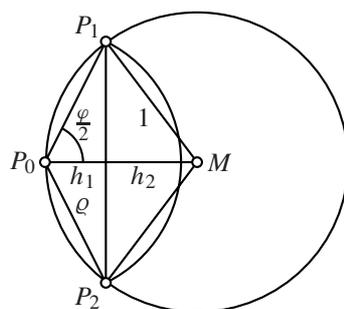


Aufgabe 1220 (Die einfache dritte Aufgabe).

- a) Auf der Peripherie des Einheitskreises befinde sich das Zentrum eines zweiten Kreises. Wie gross muss dessen Radius ϱ sein, damit der Inhalt des innerhalb beider Kreise liegenden Flächenstückes halb so gross ist wie der Inhalt des Einheitskreises?
- b) Die Zweikreisfigur von Aufgabe a) rotiere jetzt um die Zentrale, so dass zwei sich durchdringende Kugeln entstehen. Wie gross muss der Radius ϱ jetzt sein, damit das Volumen des Durchdringungskörpers halb so gross ist wie das Volumen der Einheitskugel?

Walter Vetsch, St. Gallen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingegangen: Peter Bundschuh (Köln, D), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Albert Stadler*:

- a) Aus dem gleichschenkligen Dreieck P_0MP_1 liest man ab:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varrho}{2} \iff \varrho = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

Um die Schnittfläche A der beiden Kreise zu erhalten, subtrahieren wir die doppelte Fläche des Dreiecks P_1P_0M von der Summe der Flächen der Sektoren $P_1P_0P_2$ und P_1MP_2 :

$$A = \frac{1}{2}\varrho^2\varphi + \frac{1}{2}(2\pi - 2\varphi) - \sin(\varphi) = \varphi \cdot \cos(\varphi) + \pi - \sin(\varphi).$$

Gefordert wird $A = \pi/2$, was auf die transzendente Gleichung

$$\sin(\varphi) - \varphi \cdot \cos(\varphi) - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (2)$$

führt. Die Ableitung $\phi' : \varphi \mapsto \varphi \cdot \sin(\varphi)$ der Funktion $\phi : \varphi \mapsto \sin(\varphi) - \varphi \cdot \cos(\varphi) - \pi/2$ ist auf dem Intervall $]0, \pi[$ positiv, ϕ ist also auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton wachsend, und wegen $\phi(0) \cdot \phi(\pi) < 0$ besitzt (2) im Intervall $[0, \pi]$ genau eine Lösung, für welche man mit Näherungsverfahren $\varphi_0 \approx 1.9056957$ findet. Mit Hilfe von (1) erhält man für den gesuchten Kreisradius $\varrho_0 \approx 1.1587285$.

- b) Das Schnittvolumen der beiden Kugeln findet man als Summe der Volumina der Kugelabschnitte mit den Kappenhöhen h_1 und h_2 als

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h_1^2 \cdot (3 - h_1) + \frac{\pi}{3} \cdot h_2^2 \cdot (3\varrho - h_2).$$

Berücksichtigt man (1) sowie $h_1 = \varrho \cdot \cos(\varphi/2) = 2 \cos^2(\varphi/2)$ und $h_2 = \varrho - h_1 = 2 \cos(\varphi/2) - 2 \cos^2(\varphi/2)$, so erhält man für das Volumen

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(16 - 12 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{12} \cdot \varrho^3 \cdot (8 - 3\varrho).$$

Die Bedingung $V = 2\pi/3$ führt schliesslich zur Gleichung

$$3\varrho^4 - 8\varrho^3 + 8 = 0. \quad (3)$$

Die Ableitung $\rho' : \varrho \mapsto 12\varrho^2(\varrho - 2)$ der Funktion $\rho : \varrho \mapsto 3\varrho^4 - 8\varrho^3 + 8$ ist auf dem Intervall $]0, 2[$ negativ, ρ ist also auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend, und wegen $\rho(0) \cdot \rho(2) < 0$ besitzt (3) auf dem Intervall $[0, 2]$ genau eine Lösung, welche sich näherungsweise als $\varrho_0 \approx 1.2285449$ berechnen lässt. Die Lösung lässt sich aber auch exakt angeben: Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^5} - \frac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^6}} + \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^5} + \frac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^6}}, \\ \beta &:= \sqrt[3]{\frac{2^{14}}{3^9} - \frac{2^{13} \cdot \sqrt[3]{2}}{3^9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{14}}{3^9} + \frac{2^{13} \cdot \sqrt[3]{2}}{3^9}}, \\ \gamma &:= \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^2} - \frac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^3}} + \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^3}}, \\ \delta &:= \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^3} - \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^3}} + \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^3} + \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^3}} \end{aligned}$$

stellt sie sich dar als

$$\varrho_0 = \frac{2}{3} - \sqrt[2]{\frac{2^3}{3^2} - \delta + \sqrt{\alpha - \beta + \gamma - \frac{2^3}{3^4} + \sqrt{\delta + \frac{2^2}{3^2}}}.$$

Nachtrag: In der Löserliste von Aufgabe 1217 ist Dieter Koller (Zürich, CH) vergessen gegangen.