
Über einen Satz von Jacob Steiner

Adolf Schleiermacher

Adolf Schleiermacher hat in Frankfurt am Main Mathematik und Physik studiert. Im Jahr 1968 hat er bei Ruth Moufang promoviert. Danach war er u.a. als Lecturer am Imperial College in London tätig. Von 1975 bis 1999 arbeitete er in der Industrie. Er fühlt sich dem Kreis von Mathematikern um Reinhold Baer verbunden.

1 Einleitung

Ein Hyperboloid ist eine Fläche zweiten Grades im dreidimensionalen projektiven Raum, die zwei Scharen von Geraden enthält, derart, daß jede Gerade der einen Schar zu allen übrigen Geraden dieser Schar windschief liegt, aber alle Geraden der andern Schar schneidet. Die Geraden der beiden Scharen nennt man auch Erzeugende des Hyperboloids. Hyperboloide gibt es nur bei kommutativem Koordinatenkörper (s. Herzer [8]). Im affinen Raum entstehen aus einem Hyperboloid zwei mögliche Typen von Flächen, je nachdem ob die unendlich ferne Ebene das Hyperboloid berührt oder schneidet: im ersten Fall das hyperbolische Paraboloid, im zweiten Fall das einschalige Hyperboloid.

Nach einem Satz von Jacob Steiner (s. [13] oder [14, S. 316]) sind bekanntlich die Höhen eines Tetraeders in einer der beiden Erzeugendenscharen eines einschaligen Hyperboloids enthalten, vorausgesetzt das Tetraeder erfüllt gewisse Bedingungen, die sicherstellen, daß von den Höhen keine zwei in einer Ebene liegen. Einen analytischen Beweis dieses Satzes hat Otto Hermes [7] gegeben.

Ein Satz von Steiner besagt, daß die vier Höhen eines Tetraeders in einem Hyperboloid liegen. Im nachfolgenden Beitrag werden die Bedingungen der Gültigkeit dieses Satzes in dem allgemeineren Kontext eines affinen Raumes mit Orthogonalität im Sinne von Lenz [10] untersucht. Als notwendige und hinreichende Bedingungen ergeben sich einige einfache geometrische Aussagen, wie z.B. der Höhensatz, die ihrerseits alle damit äquivalent sind, daß die Polarität in der unendlich fernen Ebene durch eine symmetrische Bilinearform induziert wird. Eine entsprechende Untersuchung wird für das projektive Analogon durchgeführt. Die diesbezüglichen Ergebnisse sind weitgehend analog zum affinen Fall.

Es ist der Zweck dieser Note, den Steinerschen Satz in einen allgemeineren Zusammenhang zu stellen. Dazu betrachten wir einen affinen Raum mit einer Orthogonalität zwischen den Geraden im Sinne von Lenz [10]. Eine solche Orthogonalität mit den von Lenz geforderten natürlichen Eigenschaften läßt sich auf eine Polarität in der unendlich fernen Ebene zurückführen (s. Lenz [10]). Analysiert man den Satz von Steiner in diesem Zusammenhang, so wird man zwanglos auf eine Reihe einfacher geometrischer Aussagen geführt, die einerseits alle mit dem Satz selber und andererseits damit äquivalent sind, daß die Polarität in der unendlich fernen Ebene durch eine symmetrische Bilinearform gegeben ist. Zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt man, wenn man den Satz in projektiven Räumen mit Polarität untersucht.

Die Ergebnisse sind zusammengefaßt in §6, Satz 1 für den affinen Fall und in §7, Satz 2 für den projektiven Fall. In den Paragraphen 2–5 stellen wir bekannte Resultate zusammen, die später benötigt werden. Die Beweise der Sätze 1 und 2 sind überwiegend synthetischer Natur und fußen auf den elementarsten Eigenschaften des Senkrechtstehens.

2 Projektive Räume mit Polarität

Sei \mathcal{P} ein Desarguesscher projektiver Raum der endlichen Dimension $n \geq 2$ mit vorgegebener Polarität π . Die Polarität π läßt sich durch eine nichtausgeartete Semibilinearform f des zugrundeliegenden Vektorraums V darstellen. Den zugehörigen Koordinatenschiefkörper bezeichnen wir mit K , den zugehörigen Antiautomorphismus von K mit σ . Damit wirklich eine Polarität dargestellt wird, muß die Form f noch die zusätzliche Eigenschaft $f(x, y) = 0 \rightarrow f(y, x) = 0$ haben (s. Baer [2]). Wenn K kommutativ ist, kann σ die Identität sein. Die Polaritäten, für die das zutrifft, lassen sich durch folgende geometrische Eigenschaft gemeinsam charakterisieren: sie bilden eine und damit jede Punktreihe g projektiv auf das zugehörige Hyperebenenbüschel ab (s. Lenz [11]). Sie werden daher projektive Polaritäten genannt.

Wie üblich definiert man: Ein Punkt P ist konjugiert zu einem Punkt Q , wenn P auf der Polaren von Q liegt. Eine Hyperebene α steht senkrecht auf einer Hyperebene β , wenn α den Pol von β enthält. Wir schreiben hierfür $P \sim Q$ bzw. $\alpha \perp \beta$. Die Beziehungen $P \sim Q$ und $\alpha \perp \beta$ sind bekanntlich symmetrisch.

Sei α eine Hyperebene, die ihren Pol $P = \pi(\alpha)$ nicht enthält. Bilden wir jeden Unterraum X von α auf $\pi(X) \cap \alpha$ ab, so erhalten wir eine Polarität von α . Diese Polarität bezeichnen wir mit π_α . Dual hierzu können wir die Gesamtheit der Unterräume betrachten, die den Punkt P enthalten. Diese Unterräume bilden ebenfalls einen projektiven Raum der Dimension $n - 1$. Wir nennen ihn den mit dem Büschel mit Träger P assoziierten Raum und bezeichnen ihn mit $\mathcal{E}(P)$. Ist $P \in X$, so ist $\pi(X) \subseteq \alpha$. Die Abbildung $X \rightarrow \pi(X) \cup P$ ist eine Polarität des Büschelraums $\mathcal{E}(P)$. Diese Polarität bezeichnen wir mit $\pi_{(P)}$.

Die Abbildung $\varphi : X \rightarrow X \cup P$ ist ein Isomorphismus der Hyperebene α auf den Raum $\mathcal{E}(P)$, der mit den induzierten Polaritäten vertauschbar ist, für den also $\varphi\pi_\alpha(X) = \pi_{(P)}\varphi(X)$ für alle Unterräume X von α gilt.

3 Affine Räume mit Orthogonalität

Sei \mathcal{A} ein dreidimensionaler affiner Raum mit einer Beziehung des Senkrechtstehens von Geraden im Sinne von Lenz [10]. Sind g und h Geraden, so wird ihr Senkrechtstehen

durch $g \perp h$ ausgedrückt. Sind g und h parallel, so schreiben wir $g \parallel h$. Es wird nicht verlangt, daß aufeinander senkrecht stehende Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Die Beziehung des Senkrechtstehens soll die folgenden Axiome erfüllen:

- Ia) Aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$.
- Ib) Aus $a \perp b$ und $b \parallel c$ folgt $a \perp c$.
- II) Ist $OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $D \in BC$, $D \neq O$, so ist $OA \perp OD$.

Geraden, die auf sich selber senkrecht stehen, werden *isotrop* genannt.

- IIIa) Ist die Gerade AB nicht-isotrop, so liegt auf jeder von AB verschiedenen Geraden durch B , die nicht auf AB senkrecht steht, ein Punkt C mit $AC \perp AB$.
- IIIb) Ist die Gerade AB isotrop, so liegt auf jeder AB nicht schneidenden und nicht auf AB senkrechten Geraden ein Punkt C mit $AB \perp AC$.
- IV) Keine Gerade steht auf allen Geraden senkrecht.

Wie Lenz gezeigt hat, läßt sich dann in der unendlich fernen Ebene eine Polarität π einführen mit der Eigenschaft, daß zwei Geraden g und h genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn ihre unendlich fernen Punkte zueinander bezüglich der Polarität π konjugiert sind.

Aus Axiom II) zusammen mit Ib) ergibt sich die weitere Aussage:

- V) Steht eine Gerade auf zwei nichtparallelen Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen Geraden dieser Ebene senkrecht.

Definition. Eine Gerade g steht auf einer Ebene α senkrecht, wenn sie auf allen Geraden der Ebene senkrecht steht. Wir schreiben hierfür $g \perp \alpha$.

Eine Ebene α steht auf einer Ebene β senkrecht, wenn sie auf einer in β enthaltenen Geraden senkrecht steht. Wir schreiben hierfür $\alpha \perp \beta$.

Aus der Tatsache, daß die Orthogonalität durch eine Polarität der unendlich fernen Ebene gegeben ist, folgen noch die Aussagen:

- VI) Zu einer beliebigen Ebene α von \mathcal{A} existiert durch einen beliebig gegebenen Punkt P eine eindeutig bestimmte Gerade, die senkrecht auf α steht.

Wir nennen diese Gerade das Lot auf die Ebene α durch den Punkt P . Eine Ebene wird *isotrop* genannt, wenn sie eines ihrer Lote enthält.

- VII) Für beliebige Ebenen α und β gilt: Aus $\alpha \perp \beta$ folgt $\beta \perp \alpha$.
- VIII) Wenn eine Ebene α auf zwei nicht-parallelen Ebenen β und γ senkrecht steht, so steht die Schnittgerade $g = \beta \cap \gamma$ auf α senkrecht.

4 Der affine Satz vom Höhenschnittpunkt

Sei \mathcal{E} eine beliebige affine Ebene. Ist g eine Gerade, so bezeichnen wir mit \bar{g} ihren unendlich fernen Punkt. Es sei nun φ eine involutorische Abbildung oder die Identität auf der Menge der unendlich fernen Punkte. Wir definieren eine Beziehung des Senkrechtstehens

zwischen Geraden durch $g \perp_{\varphi} h$, wenn $\bar{h} = \varphi(\bar{g})$. Dann gibt es zu einer beliebigen Geraden g durch einen beliebigen Punkt P ein eindeutig bestimmtes Lot, d.h. eine Gerade h , so daß $g \perp_{\varphi} h$. Zum Höhensatz in dieser Situation vergleiche man die Untersuchungen von Baer [3].

Bemerkung. Ist φ die identische Abbildung, so ist der Höhensatz, wie man leicht sieht, äquivalent mit der Aussage, daß in jedem Parallelogramm auch die Diagonalen parallel sind.

Hilfssatz. Wenn in \mathcal{E} bezüglich der Relation \perp_{φ} der Satz vom Höhenschnittpunkt gilt, so ist φ eine Projektivität.

Beweis. Wir bezeichnen mit $[xX]$ die Perspektivität $Y \rightarrow YX$ für $Y \in x$ und mit $[Xx]$ deren Inverse. Wir benutzen eine Idee von Lenz [11, S. 65].

Seien l die unendlich ferne Gerade der Ebene \mathcal{E} , P ein fester Punkt und a, b zwei nicht aufeinander senkrecht stehende Geraden durch den Punkt P . Wir setzen $A = \varphi(\bar{a})$ und $B = \varphi(\bar{b})$. Da a und b nicht aufeinander senkrecht stehen, ist $A \neq \bar{b}$ und $B \neq \bar{a}$. Wir wählen eine feste, nicht durch P gehende Gerade g durch den unendlich fernen Punkt A und setzen $G = g \cap b$. Sei nun h eine variable Gerade durch den Punkt P . Wir nehmen zunächst an, daß h nicht durch A und auch nicht durch B geht. Dann läßt sich aufgrund des Höhensatzes das Bild $\varphi(\bar{h})$ des unendlich fernen Punktes \bar{h} leicht konstruieren. Sei nämlich $S = h \cap g$ und $T = BS \cap a$. Im Dreieck PGT ist S der Schnittpunkt der Höhen durch den Punkt G und durch den Punkt T . Also ist $h = PS$ die dritte durch P gehende Höhe, und es folgt $h \perp GT$. Somit ist $\varphi(\bar{h})$ der unendlich ferne Punkt der Geraden GT . Es folgt aus der Konstruktion, daß φ mit der Projektivität $\psi = [lP][Pg][gB][Ba][aG][Gl]$ in allen Punkten \bar{h} übereinstimmt. Da φ offenbar auch mit ψ in den Punkten A und B übereinstimmt, ist φ eine Projektivität. \square

5 Der projektive Satz vom Höhenschnittpunkt

Sei \mathcal{E} eine beliebige projektive Ebene mit fest gegebener Polarität π . Wie im Desarguesschen Fall läßt sich eine Beziehung des Senkrechtstehens zwischen Geraden definieren: die Gerade g steht auf der Geraden h senkrecht, wenn h durch den Pol $\pi(g)$ von g geht. Wir sagen dann auch: g ist ein Lot auf h , und schreiben hierfür $g \perp h$. Die Relation $g \perp h$ ist symmetrisch.

In einem Dreieck heißt jedes Lot durch eine Ecke auf die gegenüberliegende Seite eine Höhe. Um die Höhen eindeutig zu machen, betrachtet man nur Dreiecke, in denen keine Ecke gleich dem Pol der gegenüberliegenden Seite ist. In Dreiecken mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Seiten, ist die Ecke, wo diese aufeinandertreffen, trivialerweise ein Höhenschnittpunkt. Natürlich gilt der Satz vom Höhenschnittpunkt nicht in jeder projektiven Ebene mit Polarität. In einer Desarguesschen Ebene ist er, wie Lenz gezeigt hat (s. [11, S. 65]), damit gleichwertig, daß der Koordinatenkörper kommutativ ist und die Polarität durch eine symmetrische Bilinearform induziert wird. Ob der Satz von Desargues aus dem Höhensatz gefolgert werden kann, ist ein unseres Wissens noch offenes Problem.

Die folgende Aussage über vollständige Vierseite ist gleichwertig mit dem Satz vom Höhenschnittpunkt:

Vierseitbedingung. *Wenn in einem vollständigen Vierseit die Punkte in zwei gegenüberliegenden Paaren zueinander konjugiert sind, so sind sie es auch im dritten Paar:*

Man erkennt die Äquivalenz mit dem Höhensatz am leichtesten durch Dualisieren: Stehen in einem vollständigen Viereck zwei Paare von Gegenseiten aufeinander senkrecht, so gilt dies auch für das dritte Paar. Diese Aussage ist, wie man sofort sieht, gleichwertig mit dem Höhensatz.

Unabhängig von der Polarität π betrachten wir noch einen Sonderfall:

Hilfssatz. *Sei \mathcal{E} die Ebene über dem Körper mit zwei Elementen. Dann gilt für jede symmetrische Beziehung des Senkrechtstehens und in jedem Dreieck mit eindeutig bestimmten Höhen: die Höhen gehen durch einen gemeinsamen Punkt.*

Beweis. Wir betrachten ein Dreieck ABC und dürfen annehmen, daß keine zwei seiner Seiten aufeinander senkrecht stehen. Dann ist auch keine der Höhen gleich einer Dreiecksseite. Da nun aber die Ebene \mathcal{E} nur sieben Punkte enthält, und auf jeder Geraden drei Punkte liegen, so gibt es nur einen einzigen Punkt P , der auf keiner Dreiecksseite liegt. Durch diesen Punkt müssen alle drei Höhen gehen. \square

6 Der Satz von Steiner im affinen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir einen dreidimensionalen affinen Raum \mathcal{A} mit einer Beziehung des Senkrechtstehens zwischen den Geraden, welche die Lenzschen Axiome erfüllt (s. §3).

Sei $P_0 P_1 P_2 P_3$ ein Tetraeder. Durch jede Ecke P_i geht ein eindeutig bestimmtes Lot auf die gegenüberliegende Seitenfläche $P_j P_k P_l$, wo $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Diese Lote nennt man Höhen. Wir bezeichnen die durch P_i gehende Höhe mit h_i . Die Höhe h_i schneidet nicht immer die gegenüberliegende Seitenfläche $P_j P_k P_l$, nämlich genau dann nicht, wenn die Seitenfläche $P_j P_k P_l$ isotrop ist. Wir nennen ein Tetraeder *zulässig*, wenn keine Kante auf der ihr gegenüberliegenden senkrecht steht.

Sei $P; abc$ das Dreikant mit Spitze P und Kanten a, b und c . Ein Dreikant nennen wir *zulässig*, wenn keine seiner Kanten auf der ihr gegenüberliegenden Seitenfläche senkrecht steht.

6.1 Hilfssatz. *Sei $P_0; abc$ ein zulässiges Dreikant. Wenn es auf jeder Geraden mindestens vier Punkte gibt, so lassen sich Punkte $P_1 \in a, P_2 \in b$ und $P_3 \in c$ finden, die zusammen mit P_0 ein zulässiges Tetraeder bilden.*

Beweis. Wir wählen auf a einen beliebigen von P_0 verschiedenen Punkt P_1 . Sind dann P_2, P_2' von P_0 verschiedene Punkte auf b , so kann höchstens eine der Geraden $P_1 P_2$ oder $P_1 P_2'$ senkrecht auf c stehen. Denn andernfalls wäre $c \perp a \cup b$ entgegen unseren Annahmen. Also können wir einen Punkt $P_2 \neq P_0$ auf b wählen, so daß $P_1 P_2$ nicht auf c senkrecht steht. Auf der Geraden c gibt es nun mindestens drei von P_0 verschiedene Punkte P_3, P_3', P_3'' . Von den Geraden $P_1 P_3, P_1 P_3'$ usw. kann wieder höchstens eine senkrecht auf b stehen, und von den Geraden $P_2 P_3, P_2 P_3'$ usw. kann auch nicht mehr als eine senkrecht auf

a stehen. Also können wir einen Punkt P_3 auf c so wählen, daß $P_1 P_3$ nicht senkrecht auf b und $P_2 P_3$ auch nicht senkrecht auf a steht. Dann ist $P_0 P_1 P_2 P_3$ ein zulässiges Tetraeder. \square

Der obige Hilfssatz ist im affinen Raum über dem Körper mit zwei oder drei Elementen nicht anwendbar. Betrachten wir zunächst den affinen Raum über dem Körper mit drei Elementen. Ist f eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform des zugrundeliegenden Vektorraums vom Rang 3, so hat bezüglich einer geeigneten Basis v_1, v_2, v_3 die Form f die Diagonalgestalt

$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

wobei $x = \sum x_i v_i, y = \sum y_i v_i$ (s. Dickson [6, S. 158]). Man verifiziert nun leicht, daß z.B. die vier Punkte mit den Koordinatenvektoren $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, -1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ ein zulässiges Tetraeder bilden. Es ist auch nicht schwierig, sich durch ein Beispiel zu überzeugen, daß Hilfssatz 6.1 in diesem Raum nicht gültig bleibt. Im affinen Raum über dem Körper mit zwei Elementen gibt es keine zulässigen Tetraeder (s. Bemerkung am Schluß von §7).

6.2 Hilfssatz. *Die Höhen eines beliebigen Tetraeders haben unterschiedliche Fernpunkte, von denen keine drei kollinear liegen. Daher sind die Höhen untereinander verschieden, und keine drei von ihnen liegen parallel zur selben Ebene.*

Beweis. Die Ferngeraden der vier Seitenflächen des Tetraeders befinden sich in allgemeiner Lage. Von den Polen dieser Ferngeraden liegen also keine drei kollinear. Die Pole entsprechen aber den Fernpunkten der Höhen. \square

6.3 Hilfssatz. *Sei $i \neq j$ ein Indexpaar mit $0 \leq i, j \leq 3$. Genau dann liegen die Höhen h_i und h_j in einer Ebene, wenn die einander gegenüberliegenden Kanten $P_i P_j$ und $P_k P_l$ mit $i, j \neq k, l$ aufeinander senkrecht stehen.*

Beweis. Es gelte $P_k P_l \perp P_i P_j$. Ist $h_j = P_i P_j$, so haben h_i und h_j den Punkt P_i gemeinsam. Sei also $h_j \neq P_i P_j$, und sei β die Ebene $P_i \cup h_j$. Nun gilt $P_k P_l \perp P_i P_j$ und $P_k P_l \perp h_j$, also folgt $P_k P_l \perp \beta$ nach §3. Dann steht die Ebene β senkrecht auf jeder Ebene, die $P_k P_l$ enthält, mithin auf $P_j P_k P_l$. Daraus folgt, daß β auch die Höhe h_i enthält.

Liege nun umgekehrt die Höhe h_i mit h_j in einer Ebene β . Die Ebene β enthält die Gerade $P_i P_j$. Die Gerade $P_k P_l$ steht nun senkrecht auf den Höhen h_j und h_i , die einander nicht parallel sein können. Also steht $P_k P_l$ senkrecht auf allen Geraden der Ebene β , mithin auch auf $P_i P_j$. \square

Tetraeder, in denen alle Paare gegenüberliegender Kanten aufeinander senkrecht stehen, heißen *orthogonal*.

6.4 Hilfssatz. *In einem orthogonalen Tetraeder und nur in einem solchen gehen alle vier Höhen durch einen Punkt.*

Beweis. In einem orthogonalen Tetraeder schneiden sich nach den Hilfssätzen 6.2 und 6.3 die Höhen paarweise. Daraus folgt, daß sie alle vier durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen. Da letzteres nicht möglich ist, gehen sie durch einen Punkt.

Die Umkehrung folgt aus Hilfssatz 6.3. \square

Der Satz von Steiner läßt sich nun wie folgt aussprechen:

6.5 Satz von Steiner. *In jedem zulässigen Tetraeder liegen die Höhen in einer von den zwei Erzeugendenscharen eines einschaligen Hyperboloids.*

Der Satz von Steiner gilt natürlich nicht in jedem affinen Raum mit Orthogonalität, da die Existenz eines Hyperboloids schon den Satz von Pappos nach sich zieht. Das Hyperboloid kann übrigens, wenn es existiert, nur ein einschaliges Hyperboloid sein. Denn lägen die Höhen als Erzeugende in einem hyperbolischen Paraboloid, so enthielte dieses eine Gerade g aus der zweiten Erzeugendenschar in der unendlich fernen Ebene. Die Höhen lägen dann alle parallel zu jeder Ebene mit Ferngerade g , was nach Hilfssatz 6.2 ausgeschlossen ist.

Nennen wir zwei in derselben Ebene liegende Geraden Treffgeraden (sie können sich schneiden oder parallel sein), so folgt aus dem Satz von Steiner insbesondere die folgende Aussage:

6.6 Steinersche Bedingung. *Durch jede Ecke eines beliebigen zulässigen Tetraeders geht eine Treffgerade der vier Höhen.*

Steiner hat gezeigt, daß diese Bedingung im euklidischen Raum erfüllt ist, und daraus auf die Existenz des Höhenhyperboloids geschlossen. Daneben interessieren uns noch die folgenden Bedingungen:

6.7 Affine Dreikantbedingung. *In jedem zulässigen Dreikant haben die durch die Kanten gehenden und auf den gegenüberliegenden Seitenflächen senkrecht stehenden Ebenen eine Gerade gemeinsam.*

6.8 Affine Tetraederbedingung. *Wenn in einem Tetraeder zwei Paare von gegenüberliegenden Kanten aufeinander senkrecht stehen, so tun dies auch die Kanten des dritten Paares.*

Vgl. hierzu den Satz in [12, S. 84], ebenso [9, S. 107]. Man erkennt sofort die enge Beziehung dieser Bedingung zum affinen Satz vom Höhenschnittpunkt. Man kann beide Aussagen in der folgenden Form zusammenfassen: Sind A, B, C, D vier untereinander verschiedene Punkte und gilt $AD \perp BC$, sowie $BD \perp AC$, so folgt $CD \perp AB$. Auch lassen sich manche Beweise des Höhensatzes fast wörtlich auf die Tetraederbedingung übertragen (vgl. Berger [5, Bd I, 10.13.1]).

6.9 Joachimsthal'sche Bedingung. *Sei h eine der Höhen in einem zulässigen Tetraeder. Dann gibt es eine Treffgerade aller vier Höhen, die zu h parallel ist.*

Diese Bedingung liefert wegen Hilfssatz 6.2 immer vier verschiedene Treffgeraden.

Satz 1 Sei \mathcal{A} ein dreidimensionaler affiner Raum mit Orthogonalität, π die zugehörige Polarität der unendlich fernen Ebene \mathcal{E} und f eine in dem \mathcal{A} zugrundeliegenden Vektorraum definierte Semibilinearform, welche π induziert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) In \mathcal{A} ist die Steinersche Bedingung erfüllt.
- ii) In \mathcal{A} ist die affine Dreikantbedingung erfüllt.
- iii) In der unendlich fernen Ebene \mathcal{E} gilt bezüglich π der projektive Satz vom Höhenschnittpunkt.
- iv) In der unendlich fernen Ebene \mathcal{E} ist die Vierseitbedingung erfüllt.
- v) In \mathcal{A} ist die affine Tetraederbedingung erfüllt.
- vi) In jeder nicht-isotropen Ebene von \mathcal{A} gilt bezüglich f der affine Satz vom Höhenschnittpunkt.
- vii) In \mathcal{A} gilt der Satz von Pappos, und f ist eine symmetrische Bilinearform.
- viii) In \mathcal{A} ist die Joachimsthal'sche Bedingung erfüllt.
- ix) In \mathcal{A} gilt der Satz von Steiner.

Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

6.10 Hilfssatz. Im Dreieck $P_0P_1P_2$ existiere ein Höhenschnittpunkt H . Wenn dann die Höhe h_3 im Tetraeder $\Delta = P_0P_1P_2P_3$ durch den Punkt H geht, so ist Δ ein orthogonales Tetraeder.

Beweis. Wir zeigen, daß zum Beispiel $P_0P_3 \perp P_1P_2$ gilt. Die restlichen Orthogonalitätsbeziehungen folgen aus Symmetriegründen. Ist zunächst $h_3 = P_0P_3$, so gilt die geforderte Beziehung trivialerweise. Also dürfen wir $h_3 \neq P_0P_3$ annehmen. Dann bestimmen die Punkte P_0, P_3, H eine Ebene und die Punkte P_0, H eine Gerade. Es gilt nach Voraussetzung $P_0H \perp P_1P_2$ und $P_3H \perp P_1P_2$. Also steht die Gerade P_1P_2 auf zwei nichtparallelen Geraden der Ebene P_0P_3H senkrecht. Mithin steht sie auf allen Geraden dieser Ebene senkrecht, also auch auf P_0P_3 . \square

Beweis von Satz 1. i) \rightarrow ii). Wir betrachten ein zulässiges Dreikant $P_0; abc$. Wenn es Punkte $P_1 \in a$, $P_2 \in b$ und $P_3 \in c$ gibt, die mit der Spitze P_0 zusammen ein zulässiges Tetraeder bilden, so existiert eine durch P_0 gehende Treffgerade der vier Höhen dieses Tetraeders. Sie sei mit t bezeichnet. Ist t von $a = P_0P_1$ verschieden, so enthält die Ebene $a \cup t$ auch die Höhe h_1 , ist also identisch mit der Ebene α durch a , die auf $b \cup c = P_0P_2P_3$ senkrecht steht. Ist aber $t = a$, so enthält die Ebene α jedenfalls t . In ähnlicher Weise zeigen wir, daß die Ebene β durch b , die auf $c \cup a$ senkrecht steht, und die Ebene γ durch c , die auf $a \cup b$ senkrecht steht, die Treffgerade t enthalten. Es gilt also die Aussage der Dreikantbedingung.

Wenn es auf jeder Geraden von \mathcal{A} mindestens vier Punkte gibt, folgt die Existenz der oben geforderten Punkte P_1 , P_2 und P_3 aus Hilfssatz 6.1.

Wenn es auf jeder Geraden höchstens drei Punkte gibt, ist die obige Schlußweise nicht durchführbar. Dann ist aber \mathcal{A} ein affiner Raum über dem Körper von zwei oder von drei Elementen. Der Koordinatenkörper von \mathcal{A} ist dann jedenfalls kommutativ und die Form f symmetrisch. Nach Lenz [11, Satz 19, S. 65] gilt in jeder Büschelebene dann der Höhensatz und dies ist nichts anderes als die affine Dreikantbedingung.

ii) \rightarrow iii). Sei ABC ein Dreieck in der unendlich fernen Ebene, in welchem keine Ecke mit dem Pol der Gegenseite zusammenfällt. Wir wählen in \mathcal{A} einen beliebigen Punkt P_0 . Dann bilden die Geraden $a = P_0A$, $b = P_0B$ und $c = P_0C$ ein zulässiges Dreikant. Den drei Ebenen durch die Kanten des Dreikants, die auf den gegenüberliegenden Seitenflächen senkrecht stehen, entsprechen als unendlich ferne Geraden die Höhen des Dreiecks ABC . Da die drei Ebenen nach Voraussetzung eine Gerade gemeinsam haben, gehen die Höhen durch den unendlich fernen Punkt dieser Geraden.

iii) \rightarrow iv). Siehe §5.

iv) \rightarrow v). Die Ferngeraden der Seitenflächen eines Tetraeders bilden zusammen mit den Fernpunkten der Kanten in der unendlich fernen Ebene ein vollständiges Vierseit. Da nun Geraden genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn ihre Fernpunkte konjugiert sind, ergibt sich aus der Vierseitbedingung die affine Tetraederbedingung.

v) \rightarrow vi). Sei α eine nicht-isotrope Ebene und ABC ein Dreieck in α . Wir können annehmen, daß das Dreieck nicht rechtwinklig ist. Sei H der Schnittpunkt der beiden durch A bzw. durch B gehenden Höhen. Dann ist also H von A , B und C verschieden. Wir errichten im Punkte H das Lot auf die Ebene α und bezeichnen es mit h . Da α nicht-isotrop ist, liegt h nicht in α , und wir können auf h einen Punkt D außerhalb von α wählen.

Nun gilt $BC \perp h$ und $BC \perp AH$. Also folgt $BC \perp A \cup h$ und daher $BC \perp AD$. Weiterhin $AC \perp h$ und $AC \perp BH$, also $AC \perp B \cup h$ und daher $AC \perp BD$. Nach Voraussetzung gilt also auch $AB \perp CD$. Da auch $AB \perp h$, folgt also $AB \perp C \cup h$ und somit $AB \perp CH$. Daher ist CH die dritte Höhe im Dreieck ABC und vi) ist bewiesen.

vi) \rightarrow vii). Da die Polarität der unendlich fernen Ebene kein Nullsystem sein kann, gibt es nicht-isotrope Ebenen. Sei α eine solche und $\bar{\alpha}$ die unendlich ferne Gerade von α . Sei \bar{x} ein beliebiger Punkt auf $\bar{\alpha}$, \bar{y} der eindeutig bestimmte zu \bar{x} bezüglich π konjugierte Punkt auf $\bar{\alpha}$, d.h. $\bar{y} = \pi(\bar{x}) \cap \bar{\alpha}$. Dann ist die Abbildung $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ nach dem Hilfssatz in §4 eine Projektivität, und daraus folgt, daß die Polarität π die Punktreihe $\bar{\alpha}$ projektiv auf das Geradenbüschel mit Träger $\pi(\bar{\alpha})$ abbildet. Damit bildet sie jede Punktreihe auf das entsprechende Geradenbüschel projektiv ab, und weil π kein Nullsystem sein kann, gilt vii).

vii) \rightarrow iii). Dies gilt nach Lenz [11, Satz 19, S. 65].

Da nun die Aussagen iii)–vii) zyklisch auseinander folgen, sind sie untereinander äquivalent.

v) und vi) \rightarrow viii). Es sei $P_0P_1P_2P_3$ ein zulässiges Tetraeder. Für eine beliebige Höhe in diesem Tetraeder ist zu beweisen, daß sie eine Parallele hat, die auch die übrigen Höhen

trifft. Wir führen den Beweis nur für die Höhe h_3 durch. Für die übrigen Höhen geht er analog.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Ebene $P_0P_1P_2$ nicht-isotrop ist. Es sei H der Höhenschnittpunkt im Dreieck $P_0P_1P_2$ und F_3 der Fußpunkt der Höhe h_3 . Beide sind eigentliche Punkte, die wegen Hilfssatz 6.10 nicht zusammenfallen. Die Parallele l zu h_3 durch den Punkt H ist jedenfalls eine Treffgerade zu h_3 . Sei p_0 die durch den Punkt P_0 gehende Höhe im Dreieck $P_0P_1P_2$. Die Geraden p_0 und P_1P_2 stehen aufeinander senkrecht, ebenso die Geraden l und P_1P_2 . Daher steht P_1P_2 auf der Ebene $p_0 \cup l$ senkrecht. Daraus folgt, daß die Ebenen $P_1P_2P_3$ und $p_0 \cup l$ aufeinander senkrecht stehen, und mithin enthält die Ebene $p_0 \cup l$ durch jeden in ihr liegenden Punkt ein Lot auf die Ebene $P_1P_2P_3$ (vgl. §3, VII). Das durch den Punkt P_0 gehende Lot ist die Höhe h_0 , die also in $p_0 \cup l$ enthalten ist. h_0 und l sind Treffgeraden. Auf analoge Weise zeigt man, daß auch h_1 bzw. h_2 und l Treffgeraden sind.

Nehmen wir nun an, die Ebene $P_0P_1P_2$ sei isotrop. Die Höhe h_3 ist in diesem Fall parallel zur Ebene $P_0P_1P_2$. Wir bezeichnen mit q_i die Parallele zu h_3 durch den Punkt P_i , $i = 0, 1, 2$. Von den drei Geraden q_i können höchstens zwei zusammenfallen. Ist zum Beispiel $q_0 = q_1 = P_0P_1$, so ist jede Ebene senkrecht zu P_0P_1 parallel zu $P_0P_1P_2$. Die Höhe h_2 liegt in der eindeutig bestimmten Ebene senkrecht zu P_0P_1 , die durch P_2 geht. Dies ist aber die Ebene $P_0P_1P_2$. Also liegt h_2 in der Ebene $P_0P_1P_2$. Dann ist $q_0 = q_1 = P_0P_1$ die gesuchte Treffgerade der vier Höhen. Wir können also die Geraden q_0, q_1, q_2 als untereinander verschieden annehmen.

Wir bezeichnen mit α_i die Ebene durch P_i , die auf P_kP_l senkrecht steht, $i, k, l = 0, 1, 2$ und $k, l \neq i$. Die Ebenen α_i , $i = 0, 1, 2$, sind untereinander und von $P_0P_1P_2$ verschieden und nicht parallel. Die Ebene α_i enthält die Gerade q_i . Die Ebenen α_0 und α_1 schneiden sich in einer Geraden q parallel zu h_3 , welche die Seitenfläche $P_1P_2P_3$ in einem Punkte Q trifft. Wir wollen zeigen, daß auch die dritte Ebene α_2 die Gerade q enthält.

Es gilt $P_0Q \perp P_1P_2$ und $P_1Q \perp P_0P_2$. Also sind in dem Tetraeder $P_0P_1P_2Q$ auch die Kanten des dritten Paares orthogonal: $P_2Q \perp P_0P_1$. Daraus folgt, daß die Gerade P_0P_1 auf der Ebene $q_2 \cup Q$ senkrecht steht, und somit $q_2 \cup Q = \alpha_2$. Damit ist gezeigt, daß alle drei Ebenen α_i die Gerade q enthalten. Die Ebene α_i enthält aber die Höhe h_i , $i = 0, 1, 2$. Daher ist q Treffgerade der drei Höhen h_0, h_1, h_2 . Die Punkte Q und P_3 können nicht zusammenfallen, weil das Tetraeder $P_0P_1P_2Q$ orthogonal, das Tetraeder $P_0P_1P_2P_3$ aber zulässig ist. Daher sind auch q und h_3 Treffgeraden.

Um viii) \rightarrow ix) zu beweisen, zeigen wir zunächst viii) \rightarrow vi). Sei also $P_0P_1P_2$ ein Dreieck in einer nicht-isotropen Ebene α . Wir benötigen einen Punkt P_3 außerhalb von α , so daß die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 ein zulässiges Tetraeder bilden. Die Punkte P_3 , für die eine der Relationen $P_iP_3 \perp P_jP_k$, $i = 0, 1, 2, j, k \neq i, 3$, besteht, liegen in drei Ebenen α_i ; dabei geht α_i durch den Punkt P_i und steht senkrecht auf der Kante P_jP_k . Liegt also P_3 außerhalb von $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ und α_2 , so ist $P_0P_1P_2P_3$ ein zulässiges Tetraeder. Gibt es aber keinen Punkt außerhalb dieser vier Ebenen, so ist \mathcal{A} der affine Raum über dem Körper mit zwei Elementen. In diesem Fall folgt der affine Satz vom Höhenschnittpunkt aus dem Hilfssatz in §5. Denn wir können die Beziehung des Senkrechtstehens von der affinen Ebene auf die projektive Ebene erweitern, indem wir jede Gerade als orthogonal zur uneigentlichen

Geraden auffassen. Wir dürfen also annehmen, daß ein Punkt P_3 mit der gewünschten Eigenschaft existiert.

Im Tetraeder $P_0P_1P_2P_3$ existiert zur Höhe h_3 eine Parallele l , die alle vier Höhen trifft. Da α nicht-isotrop ist, so sind h_3 und l nicht parallel zur Ebene α . Somit existiert der Schnittpunkt $H = l \cap \alpha$. Sei q_0 die durch den Punkt P_0 gehende Höhe im Dreieck $P_0P_1P_2$. Wir wollen zeigen, daß $H \in q_0$.

Ist $H = P_0$, so ist das klar. Andernfalls existiert die Verbindungsgerade $p_0 = P_0H$. Die Ebene $p_0 \cup l$ steht senkrecht auf $\alpha = P_0P_1P_2$, da sie die Gerade l enthält. Die Ebene $p_0 \cup l$ enthält aber auch die Höhe h_0 des Tetraeders, denn h_0 und l liegen als Treffgeraden in einer Ebene und h_0 enthält den Punkt P_0 der Ebene $p_0 \cup l$. Somit steht die Ebene $p_0 \cup l$ auch auf der Seitenfläche $P_1P_2P_3$ senkrecht. Daher steht die Schnittgerade P_1P_2 der beiden Ebenen $P_0P_1P_2$ und $P_1P_2P_3$ senkrecht auf der Ebene $p_0 \cup l$. Insbesondere gilt $P_1P_2 \perp p_0$, woraus $p_0 = q_0$ folgt. Die Höhe q_0 geht also durch den Punkt H . Auf analoge Weise zeigt man, daß auch die beiden anderen Höhen im Dreieck $P_0P_1P_2$ durch den Punkt H gehen. Damit gilt in jeder nicht-isotropen Ebene der affine Satz vom Höhenschnittpunkt, es gilt also vi).

Wie wir bereits wissen, folgt aus vi) der Satz von Pappos. In einem Papposschen affinen Raum liegen vier paarweise windschiefe Geraden in einem Hyperboloid, wenn sie mindestens drei verschiedene Treffgeraden haben. Die Joachimsthalsche Bedingung liefert uns aber sogar in einem beliebigen zulässigen Tetraeder vier verschiedene Treffgeraden der vier Höhen h_i . Also liegen die Höhen als Erzeugende ein- und derselben Schar in einem Hyperboloid, und es gilt ix).

ix) \rightarrow i) folgt aus der Definition eines Hyperboloids.

Damit ist Satz 1 bewiesen. □

7 Der Satz von Steiner im projektiven Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir einen dreidimensionalen projektiven Raum \mathcal{P} mit vorgegebener Polarität π . Mit V bezeichnen wir den zugrundeliegenden Vektorraum vom Rang vier und mit f eine Semibilinearform, die π induziert. Vermerkt sei noch, daß in dem projektiven Raum \mathcal{P} von ungerader Dimension auch Nullsysteme möglich sind.

7.1 Definition. Wir nennen eine Gerade g *konjugiert* zu einer Geraden h , wenn h und $\pi(g)$ in einer Ebene liegen. Wir schreiben hierfür $g \sim h$.

Zur Terminologie vgl. [4, Vol. III, S. 34]). Es wird nicht verlangt, daß die Ebene eindeutig bestimmt ist. Es ist also auch der Fall $h = \pi(g)$ mit eingeschlossen. Die Beziehung $g \sim h$ ist offensichtlich symmetrisch.

7.2 Definition. Eine Gerade g steht senkrecht auf einer Ebene α , wenn sie durch den Pol der Ebene α geht. Wir schreiben hierfür $g \perp \alpha$.

Da $\pi(\alpha) \in g$ gleichwertig ist mit $\pi(g) \subseteq \alpha$, folgt aus obiger Definition: Wenn eine Gerade g auf einer Ebene α senkrecht steht, so ist sie konjugiert zu allen Geraden der Ebene α . Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung und zwar in der schärferen Form:

7.3 Hilfssatz. *Wenn eine Gerade zu drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden einer Ebene konjugiert ist, so steht sie auf der Ebene senkrecht.*

Beweis. Seien a, b, c drei Geraden einer Ebene α , die nicht durch einen Punkt gehen, und sei g eine zu a, b und c konjugierte Gerade. Die Gerade $\pi(g)$ liegt mit jeder der drei Geraden a, b, c in einer gemeinsamen Ebene, hat also mit jeder von ihnen einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt $\pi(g) \subseteq \alpha$ und $\pi(\alpha) \in g$. Somit ist $g \perp \alpha$.

7.4 Hilfssatz. *Sei α eine Ebene und a eine auf α nicht senkrecht stehende Gerade. Dann sind die in α enthaltenen Geraden, die zu a konjugiert sind, genau die durch den Punkt $\pi(a \cup \pi(\alpha)) = \pi(a) \cap \alpha$ gehenden.*

Beweis. Da a auf α nicht senkrecht steht, liegt der Punkt $\pi(\alpha)$ nicht auf a , und $\sigma = a \cup \pi(\alpha)$ ist eine Ebene. Die Polare einer beliebigen Geraden $b \subseteq \alpha$ geht durch den Punkt $\pi(\alpha)$. Für eine solche Gerade b ist die Aussage $b \sim a$ also gleichwertig damit, daß $\pi(b)$ in der Ebene σ liegt. Die Aussage $\pi(b) \subseteq \sigma$ ist aber ihrerseits gleichwertig damit, daß $\pi(\sigma) \in b$, also b durch den Punkt $\pi(a \cup \pi(\alpha))$ geht. \square

Von einer beliebigen Ecke P_i eines Tetraeders $\Delta = P_0P_1P_2P_3$ aus existiert ein eindeutig bestimmtes Lot auf die gegenüberliegende Seitenfläche $P_jP_kP_l$, vorausgesetzt daß $P_i \neq \pi(P_jP_kP_l)$. Wir nennen ein solches Lot eine Höhe im Tetraeder Δ und bezeichnen die durch P_i gehende Höhe wie vorher mit h_i . Den Pol $\pi(P_jP_kP_l)$ der Seitenfläche $P_jP_kP_l$ bezeichnen wir mit Q_i .

7.5 Hilfssatz. *Sei $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ und im Tetraeder $P_0P_1P_2P_3$ gelte $P_i \neq Q_i$ und $P_j \neq Q_j$. Die Höhen h_i und h_j gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn $P_iP_j \sim P_kP_l$.*

Beweis. Die Geraden $P_iQ_i = h_i$ und $P_jQ_j = h_j$ haben genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn P_iP_j und Q_iQ_j einen Punkt gemeinsam haben. Die Gerade Q_iQ_j ist aber die Polare von P_kP_l . \square

Wir nennen ein Tetraeder *zulässig*, wenn keine seiner Kanten zur gegenüberliegenden konjugiert ist. Daraus folgt insbesondere, daß keine Ecke mit dem Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche zusammenfällt.

7.6 Satz von Steiner. *In jedem zulässigen Tetraeder liegen die Höhen in einer von den beiden Geradenscharen eines Hyperboloids.*

Dieser Satz findet sich in [12, S. 153] noch ohne die einschränkende Voraussetzung, daß das Tetraeder zulässig sein muß; Ex. 7 in [4, Vol III, S. 41] enthält die korrekte Formulierung. Natürlich ist die Gültigkeit des Satzes in einem beliebigen projektiven Raum \mathcal{P} mit Polarität nicht zu erwarten. Uns geht es hier um die Bedingungen für seine Gültigkeit.

7.7 Steinersche Bedingung. *Durch jede Ecke eines beliebigen zulässigen Tetraeders geht eine Treffgerade der vier Höhen.*

Für Dreikante übernehmen wir unverändert die im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen. Neben der Steinerschen Bedingung interessieren uns noch die beiden folgenden:

7.8 Projektive Dreikantbedingung. *In jedem zulässigen Dreikant haben die zu den gegenüberliegenden Seitenflächen orthogonalen Ebenen durch die Kanten eine Gerade gemeinsam.*

7.9 Projektive Tetraederbedingung. *Sind in einem Tetraeder zwei Paare gegenüberliegender Kanten zueinander konjugiert, so gilt dies auch für das dritte Paar.*

Abgesehen von dem Sonderfall des projektiven Raumes über dem Körper mit zwei Elementen, ergibt sich die Existenz von zulässigen Tetraedern ähnlich wie im Hilfssatz 6.1 des vorigen Kapitels.

7.10 Hilfssatz. *Sei P_0 ; abc ein zulässiges Dreikant. Wenn es auf jeder Geraden mindestens vier Punkte gibt, so lassen sich Punkte $P_1 \in a$, $P_2 \in b$ und $P_3 \in c$ finden, die zusammen mit P_0 ein zulässiges Tetraeder bilden.*

Beweis. Seien $\alpha = b \cup c$, $\beta = c \cup a$ und $\gamma = a \cup b$ die Seitenflächen des Dreikants. Wir betrachten wie in Hilfssatz 7.4 die Punkte $S_1 = \pi(a \cup \pi(\alpha))$, $S_2 = \pi(b \cup \pi(\beta))$ und $S_3 = \pi(c \cup \pi(\gamma))$. Die zu a konjugierten Geraden der Ebene α gehen alle durch den Punkt S_1 , und entsprechendes gilt für β und S_2 sowie γ und S_3 . Auf der Geraden a gibt es nun jedenfalls einen Punkt P_1 , der von P_0 , S_2 und S_3 verschieden ist. Durch P_1 geht in der Ebene β genau eine Gerade, die zu b konjugiert ist, nämlich P_1S_2 . Somit gibt es in der Ebene β noch mindestens zwei von a verschiedene Geraden durch P_1 , die zu b nicht konjugiert sind. Ihre Schnittpunkte mit c seien P_3 und P'_3 . Ebenso gibt es in γ noch zwei von a verschiedene Geraden durch P_1 , die zu c nicht konjugiert sind. Ihre Schnittpunkte mit b bezeichnen wir mit P_2 und P'_2 . Unter den vier Geraden P_2P_3 , $P_2P'_3$, P'_2P_3 , $P'_2P'_3$, die keinen Punkt gemeinsam haben, geht mindestens eine nicht durch den Punkt S_1 . Notfalls nach Umbenennung der Punkte können wir annehmen, dies sei die Gerade P_2P_3 . Dann ist also P_2P_3 nicht konjugiert zur Geraden a , und $P_0P_1P_2P_3$ ist ein zulässiges Tetraeder. \square

Satz 2 *Sei \mathcal{P} ein dreidimensionaler projektiver Raum mit Polarität π , K der zugehörige Koordinatenkörper und f eine in dem zugrundeliegenden Vektorraum über K definierte Semibilinearform, welche π induziert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- i) *In \mathcal{P} ist die Steinersche Bedingung erfüllt.*
- ii) *In \mathcal{P} ist die projektive Dreikantbedingung erfüllt.*
- iii) *In \mathcal{P} gilt der projektive Satz vom Höhenschnittpunkt in jedem Punktbüschel, dessen Träger nicht auf seiner eigenen Polaren liegt. Ist π ein Nullsystem, so gilt darüber hinaus $\text{char}(K) = 2$.*
- iv) *In \mathcal{P} gilt der projektive Satz vom Höhenschnittpunkt in jeder Ebene, die ihren Pol nicht enthält. Ist π ein Nullsystem, so gilt darüber hinaus $\text{char}(K) = 2$.*

- v) K ist kommutativ, und f ist eine symmetrische Bilinearform.
- vi) In \mathcal{P} ist die zur projektiven Dreikantbedingung duale Bedingung erfüllt.
- vii) In \mathcal{P} ist die projektive Tetraederbedingung erfüllt.
- viii) In \mathcal{P} gilt der Satz von Steiner.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir noch einige Hilfssätze.

7.11 Hilfssatz. *In dem dreidimensionalen projektiven Raum über dem Körper mit zwei Elementen ist die Dreikantbedingung für jede Polarität π erfüllt.*

Beweis. Dies folgt aus dem Hilfssatz in §5 angewandt auf eine beliebige Büschelebene $\mathcal{E}(P)$. \square

7.12 Hilfssatz. *Ist π ein Nullsystem, so folgt aus der Dreikantbedingung die Aussage $\text{char}(K) = 2$.*

Beweis. Wir betrachten einen Punkt P und interpretieren die Ebenen durch den Punkt P als Geraden der Büschelebene $\mathcal{E}(P)$. Die Ebene $\pi(P)$ geht durch P und wir betrachten $\mathcal{E}(P)$ als affine Ebene mit der unendlich fernen Geraden $\pi(P)$. Das Senkrechtstehen der durch P gehenden Ebenen interpretieren wir als Senkrechtstehen der Geraden in $\mathcal{E}(P)$. Da π ein Nullsystem ist, so liegt der Pol einer beliebigen durch P gehenden und von $\pi(P)$ verschiedenen Ebene α in $\pi(P) \cap \alpha$ und ist von P verschieden. Zwei Ebenen durch den Punkt P stehen daher senkrecht aufeinander, wenn ihre Schnittgerade in $\pi(P)$ enthalten ist. Dies bedeutet nichts anderes, als daß sich in $\mathcal{E}(P)$ das Senkrechtstehen von Geraden auf die Parallelität reduziert. Damit folgt die Behauptung aus der Bemerkung in §4. \square

7.13 Hilfssatz. *Ist π ein Nullsystem, so folgt aus der Tetraederbedingung die Aussage $\text{char}(K) = 2$.*

Beweis. Sei δ eine beliebige Ebene und sei $S = \pi(\delta)$. Es gilt $S \in \delta$, weil π ein Nullsystem ist. Sind a, b, c drei nicht durch S gehende Geraden von δ , die keinen Punkt gemeinsam haben, so gehen die drei Geraden $\pi(a), \pi(b), \pi(c)$ durch S , sind nicht in δ enthalten und haben keine Ebene gemeinsam. Wir setzen $A = b \cap c, B = c \cap a$ und $C = a \cap b$. Sei γ eine von δ verschiedene Ebene durch die Gerade c . Sie schneidet $\pi(a)$ und $\pi(b)$ in Punkten X bzw. Y , und wir setzen $D = AX \cap BY$. Im Tetraeder $ABCD$ gilt dann $AD \sim BC$ und $BD \sim AC$. Aus der Tetraederbedingung folgt $CD \sim AB$. Weiter folgt noch, daß jede der drei Ebenen $A \cup \pi(a), B \cup \pi(b)$ und $C \cup \pi(c)$ die Gerade DS enthält.

Betrachten wir nun die Ebenen $\pi(A) = \pi(b) \cup \pi(c), \pi(B) = \pi(c) \cup \pi(a)$ und $\pi(C) = \pi(a) \cup \pi(b)$. Da π ein Nullsystem ist, gilt z.B. $A \in \pi(A)$. Daraus folgt $A \cup \pi(a) \perp \pi(A)$. Ebenso folgt $B \cup \pi(b) \perp \pi(B)$ und $C \cup \pi(c) \perp \pi(C)$. Stehen aber zwei durch S gehende und von δ verschiedene Ebenen aufeinander senkrecht, so schneiden sie sich in einer Geraden, die in δ enthalten ist. Betrachten wir nun die Büschelebene $\mathcal{E}(S)$ als affine Ebene mit Ferngerade δ , so ist das Senkrechtstehen von Geraden in $\mathcal{E}(S)$ nichts anderes als

Parallelität. Die Geraden $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ bilden aber in $\mathcal{E}(S)$ ein Dreieck, dessen Höhen durch den durch DS repräsentierten Punkt gehen. Daraus folgt $\text{char}(K) = 2$. \square

Beweis von Satz 2. i) \rightarrow ii). Es sei $P_0; abc$ ein zulässiges Dreieck mit den Seitenflächen $\alpha = b \cup c$, $\beta = c \cup a$ und $\gamma = a \cup b$. Wir bezeichnen mit α_1 , β_1 , γ_1 die auf α , β bzw. γ senkrecht stehenden Ebenen, die durch a , b bzw. c gehen.

Wenn es Punkte $P_1 \in a$, $P_2 \in b$, $P_3 \in c$ gibt, die zusammen mit dem Punkt P_0 ein zulässiges Tetraeder bilden, so sei t die durch P_0 gehende Treffgerade der vier Höhen dieses Tetraeders. Wir wollen zeigen, daß $t \subseteq \alpha_1$. Es ist $\alpha_1 = a \cup \pi(\alpha) = P_0 P_1 \pi(\alpha) = a \cup h_1$. Da t durch den Punkt P_0 geht und die Höhe h_1 trifft, folgt $t \subseteq \alpha_1$. Auf ähnliche Weise zeigt man, daß auch $t \subseteq \beta_1$ und $t \subseteq \gamma_1$ gilt, und somit haben die drei Ebenen α_1 , β_1 und γ_1 die Gerade t gemeinsam.

Nun haben wir also nur noch zu zeigen, daß solche Punkte P_1 , P_2 , P_3 existieren. Wegen Hilfssatz 7.11 können wir dabei annehmen, daß es auf jeder Geraden mindestens vier Punkte gibt. Dann folgt die Existenz der Punkte P_1 , P_2 , P_3 aus Hilfssatz 7.10.

ii) \rightarrow iii). Sei P ein Punkt, der nicht auf seiner Polaren $\pi(P)$ liegt. Die Geraden der zum Büschel (P) gehörigen projektiven Ebene $\mathcal{E}(P)$ sind also die Ebenen α durch den Punkt P , die Punkte von $\mathcal{E}(P)$ sind die Geraden a durch P . Der Punkt a und die Gerade α sind Pol und Polare in $\mathcal{E}(P)$, wenn $\pi(\alpha) \in a$, d.h. wenn $a \perp \alpha$. Ein Dreieck der Ebene $\mathcal{E}(P)$ ist also gegeben durch ein Dreieck mit Spitze im Punkt P , und die Bedingung, daß keine Ecke des Dreiecks mit dem Pol der Gegenseite zusammenfällt, entspricht der Aussage, daß in dem Dreieck keine Kante auf der gegenüberliegenden Seitenfläche senkrecht steht. Aus der Dreieckbedingung folgt daher der projektive Satz vom Höhenschnittpunkt, d.h. der erste Teil der Aussage iii).

Der zweite Teil der Aussage iii) folgt aus Hilfssatz 7.12.

iii) \rightarrow iv). Dies folgt aus Dualitätsgründen.

iv) \rightarrow v). Wir betrachten zuerst den Fall, daß π kein Nullsystem ist. Sei also α eine Ebene, die ihren Pol $P = \pi(\alpha)$ nicht enthält. Nach [11, Satz 19, S. 65] folgt aus dem projektiven Satz vom Höhenschnittpunkt in der Ebene α , daß die durch π induzierte Polarität π_α projektiv ist. Sei g eine beliebige Gerade von α . Dann geht $\pi(g)$ durch den Punkt P . Die Abbildung $X \rightarrow \pi_\alpha(X) = X \cap \alpha$ für $X \in g$ ist eine Projektivität der Punktreihe g auf das Geradenbüschel mit Träger $\pi(g) \cap \alpha$. Somit ist die Abbildung $X \rightarrow \pi(X)$ eine projektive Abbildung der Punktreihe g auf das Ebenenbüschel mit Träger $\pi(g)$. Daraus folgt, daß die Polarität π projektiv ist. Daher ist K kommutativ, und weil π kein Nullsystem ist, ist die Form f symmetrisch.

Ist nun π ein Nullsystem, so ist K kommutativ und f schief-symmetrisch. Da in diesem Fall aber $\text{char}(K) = 2$ gilt, so ist f zugleich auch symmetrisch.

v) \rightarrow vi). Die zur Dreieckbedingung duale Bedingung lautet:

(A) Sei $A_1 B_1 C_1$ ein Dreieck in einer Ebene α und sei keine Dreiecksseite in der Polaren der gegenüberliegenden Ecke enthalten. Dann liegen die Punkte $P = \pi(A_1) \cap B_1 C_1$, $Q = \pi(B_1) \cap C_1 A_1$ und $R = \pi(C_1) \cap A_1 B_1$ kollinear.

Seien u, v, w unabhängige Vektoren, so daß $A_1 = Ku, B_1 = Kv$ und $C_1 = Kw$. Sei ferner $P = Kp, Q = Kq, R = Kr$. Nach Voraussetzung gilt

$$f(p, u) = f(q, v) = f(r, w) = 0.$$

Wir setzen $f(u, v) = f(v, u) = \alpha, f(u, w) = f(w, u) = \beta$ und $f(v, w) = f(w, v) = \gamma$. Von den Körperelementen α, β, γ kann jeweils höchstens eines verschwinden, da sonst eine der Voraussetzungen $B_1C_1 \not\subseteq \pi(A_1)$ usw. verletzt würde. Daher sind $p_1 = \beta v - \alpha w, q_1 = \gamma u - \alpha w, r_1 = \gamma u - \beta v$ von Null verschiedene Vektoren. Die Punkte Kp_1, Kq_1, Kr_1 liegen respektive auf B_1C_1, C_1A_1 und A_1B_1 . Da nun, wie man leicht nachprüft, auch die Gleichungen $f(p_1, u) = f(q_1, v) = f(r_1, w) = 0$ erfüllt sind, so folgt, daß die Vektoren p, q, r den p_1, q_1, r_1 proportional sind. Letztere stehen aber in der Relation $p_1 - q_1 + r_1 = 0$. Also sind P, Q, R kollinear.

vi) \rightarrow vii). Es ist zu zeigen: Aus (A) folgt die Tetraederbedingung. Dies geht im Wesentlichen wie in [4, Vol. III, Ex. 5, S. 34]. Wir betrachten ein Tetraeder $ABCD$ und das dazu polare Tetraeder mit den Ecken $A_1 = \pi(BCD), B_1 = \pi(CDA), C_1 = \pi(DAB)$ und $D_1 = \pi(ABC)$. Wir nehmen $AC \sim BD$ und $AB \sim CD$ an und haben zu zeigen $AD \sim BC$. Diese Annahme bedeutet, daß die Durchschnitte $AC \cap A_1C_1$ und $AB \cap A_1B_1$ nicht leer sind und wir müssen zeigen, daß auch $BC \cap B_1C_1$ nicht leer ist. Wir dürfen annehmen, daß B_1C_1 nicht in der Ebene BCD enthalten ist. Ferner kann angenommen werden, daß $A_1 \neq A, B_1 \neq B$ und $C_1 \neq C$. Denn in allen drei Fällen ist $BC \sim AD$. Aus $A_1B_1 \subseteq DAB = \pi(C_1)$ folgt $C_1 \in \pi(A_1B_1) = CD$. Da C_1A_1 die Gerade CA schneidet, gilt dann auch $C_1A_1 \subseteq CDA$. Es folgt $B_1 \in \pi(C_1A_1) = BD$. Daher schneiden sich BC und B_1C_1 , und wir sind fertig. Auf ähnliche Weise kommen wir zum Ziel, wenn $A_1C_1 \subseteq DAC$. Also dürfen wir nun annehmen, daß die Geraden A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 nicht in den Ebenen ABD, BCD bzw. ADC enthalten sind. Es existieren also die Schnittpunkte $R = ABD \cap A_1B_1, Q = ADC \cap A_1C_1$ und $P = BCD \cap B_1C_1$. Nach Aussage (A) liegen die drei Punkte P, Q, R in einer Geraden g . Aus der Voraussetzung, daß die Durchschnitte $AC \cap A_1C_1$ und $AB \cap A_1B_1$ nicht leer sind, folgt $AC \cap A_1C_1 = Q$ und $AB \cap A_1B_1 = R$. Die beiden Punkte Q und R liegen mithin in der Ebene ABC . Wären sie gleich, so müßten sie beide mit dem Punkt A zusammenfallen, und es würde auch $A_1 = A$ folgen, was wir aber bereits ausgeschlossen hatten. Also liegen die Gerade QR und folglich auch der Punkt P in der Ebene ABC . Da P auch in der Ebene BCD liegt, schneiden sich die Geraden BC und B_1C_1 im Punkt P und die Tetraederbedingung ist bewiesen.

vii) \rightarrow iv). Sei α eine Ebene, die ihren Pol $\pi(\alpha)$ nicht enthält, und sei ABC ein in α enthaltenes Dreieck, bei dem keine Ecke mit dem Pol ihrer Gegenseite bezüglich der induzierten Polarität π_α zusammenfällt. Der Pol der Seite $a = BC$ bezüglich π_α ist definiert als $\pi_\alpha(a) = \pi(a) \cap \alpha$. Wir bezeichnen ihn mit A_1 . Ferner setzen wir $b = AC$ und $B_1 = \pi_\alpha(b) = \pi(b) \cap \alpha$ sowie $c = AB$ und $C_1 = \pi_\alpha(c) = \pi(c) \cap \alpha$. Sei H der Schnittpunkt der Höhen AA_1 und BB_1 . Wir wählen auf der Geraden $H\pi(\alpha)$ einen von H und $\pi(\alpha)$ verschiedenen Punkt D . In dem Tetraeder $ABCD$ gilt $AD \sim BC = a$, weil AD ebenso wie $\pi(a) = A_1\pi(\alpha)$ in der Ebene $AD\pi(\alpha)$ liegen. Ebenso gilt $BD \sim AC = b$, weil BD und $\pi(b) = B_1\pi(\alpha)$ beide in der Ebene $BD\pi(\alpha)$ liegen. Aus der Tetraederbedingung folgt, daß auch $CD \sim AB = c$. Dies bedeutet, daß auch CD und $\pi(c) = C_1\pi(\alpha)$

in einer Ebene liegen. Folglich geht auch die dritte Höhe CC_1 durch den Punkt H . Damit ist iv) bewiesen, wenn π kein Nullsystem ist.

Ist nun π ein Nullsystem, so folgt $\text{char}(K) = 2$ nach Hilfssatz 7.13.

iv) \rightarrow ii). Die Äquivalenz der Aussagen iv)–vii) ist nun bewiesen. Die Aussagen vi) und ii) sind dual zueinander und somit ebenfalls äquivalent.

ii) \rightarrow i). Sei $P_0P_1P_2P_3$ ein zulässiges Tetraeder. Wir betrachten das Dreikant mit den Kanten $a = P_0P_1$, $b = P_0P_2$ und $c = P_0P_3$. Es ist zulässig. Sei also t die Gerade, die den durch die Kanten gehenden und zu den gegenüberliegenden Seitenflächen orthogonalen Ebenen gemeinsam ist. Sei beispielsweise α die durch a und den Pol Q_1 der Seitenfläche $b \cup c = P_0P_2P_3$ gehende Ebene. Sie enthält offensichtlich die Höhe $h_1 = P_1Q_1$. Somit sind h_1 und t Treffgeraden. Auf ähnliche Weise folgt, daß auch h_2 und t sowie h_3 und t Treffgeraden sind. Da auch h_0 und t Treffgeraden sind, ist t eine Treffgerade aller vier Höhen. Aus Symmetriegründen folgt, daß auch durch die übrigen Ecken Treffgeraden der vier Höhen existieren. Damit ist i) bewiesen.

i) \rightarrow viii). Wie wir bereits wissen, hat i) zur Folge, daß der Körper K kommutativ und daß f eine symmetrische Bilinearform ist. Um zu zeigen, daß die Höhen in einem Hyperboloid liegen, würde es also genügen, die Existenz von mindestens drei Treffgeraden nachzuweisen. Die durch die Ecken des Tetraeders gehenden Treffgeraden sind nur in dem einen Sonderfall weniger als drei, wenn je zwei von ihnen mit einer Kante zusammenfallen. Die beiden Kanten liegen dann natürlich einander gegenüber.

In diesem Sonderfall sei H_i der Fußpunkt der Höhe h_i , $i = 0, \dots, 3$. Wir können also zum Beispiel annehmen, daß H_2, H_3 auf der Kante P_0P_1 und H_0, H_1 auf der Kante P_2P_3 liegen. Wir betrachten nun das zu P_0, P_1, P_2, P_3 polare Tetraeder mit den Ecken $Q_0 = \pi(P_1P_2P_3)$, $Q_1 = \pi(P_0P_2P_3)$ usw. Die Höhen des polaren Tetraeders sind identisch mit den Höhen des ursprünglichen Tetraeders. Deshalb folgt aus der Steinerschen Bedingung, daß auch durch jede Ecke des polaren Tetraeders eine Treffgerade der vier Höhen geht. Ist nun eine der Ecken des polaren Tetraeders von dem entsprechenden Höhenfußpunkt verschieden, z.B. $Q_0 \neq H_0$, so geht durch diese Ecke eine weitere Treffgerade, die mit keiner Kante zusammenfallen kann.

Es bleibt also nur noch der spezielle Fall zu betrachten, daß $H_i = Q_i$ für $i = 0, \dots, 3$. Es genügt nun der Nachweis, daß die Punktequadrupel P_0, P_1, Q_2, Q_3 und Q_0, Q_1, P_2, P_3 projektiv aufeinander bezogen sind (s. Schröter [12, S. 87]). Wir betrachten für die Punktreihe P_0P_1 nacheinander zwei Operationen: zuerst ersetzen wir einen beliebigen Punkt X durch seine Polare $\pi(X)$, dann die Ebene $\pi(X)$ durch ihren Schnittpunkt mit der Geraden P_2P_3 . Da π durch eine symmetrische Bilinearform dargestellt wird, ist die betrachtete Abbildung $X \rightarrow \pi(X) \cap P_2P_3$ eine Projektivität. Man prüft leicht nach, daß sie das Punktequadrupel P_0, P_1, Q_2, Q_3 in das Quadrupel Q_1, Q_0, P_3, P_2 überführt. Damit sind auch die Quadrupel P_0, P_1, Q_2, Q_3 und Q_0, Q_1, P_2, P_3 projektiv aufeinander bezogen. Somit sind die Höhen $h_0 = P_0Q_0$, $h_1 = P_1Q_1$, $h_2 = P_2Q_2$ und $h_3 = P_3Q_3$ als Verbindungsgeraden aufeinander bezogener Punkte Erzeugende eines Hyperboloids.

vii) \rightarrow i). Dies ergibt sich aus der Definition eines Hyperboloids.

Damit ist Satz 2 bewiesen. □

Bemerkungen.¹

1. Im affinen oder projektiven Raum über dem Körper mit zwei Elementen gibt es keine zulässigen Tetraeder. Denn nach Satz 1 oder nach Satz 2 gilt der Satz von Steiner. Wäre nun Δ ein zulässiges Tetraeder, so lägen die vier Höhen als Erzeugende in einem Hyperboloid. Dies ist aber unmöglich, denn weil die Geraden nur drei Punkte enthalten, so bestehen auch die Erzeugendenscharen aus jeweils nur drei Geraden.
2. Der Satz von Steiner bleibt auch in der absoluten Geometrie im Sinne von Ahrens [1] gültig. Zum Beweis kann man den absoluten Raum auf kanonische Weise wie von Ahrens beschrieben in einen projektiven Raum einbetten und dann im verallgemeinerten euklidischen Fall Satz 1, im verallgemeinerten hyperbolischen oder elliptischen Fall Satz 2 anwenden.

Literatur

- [1] Ahrens, J.: Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. *Math. Z.* 71 (1959), 154–185.
- [2] Baer, R.: *Linear Algebra and Projective Geometry*. Academic Press, New York 1952.
- [3] Baer, R.: The fundamental theorems of elementary geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.* 56 (1944), 94–129.
- [4] Baker, H.F.: *Principles of Geometry*. Vol. I–VI. Cambridge University Press, 1922.
- [5] Berger, M.: *Geometry*. (Translated from the French by Cole, M.; Levy, S.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg etc. 1987.
- [6] Dickson, L.E.: *Linear Groups*. Teubner, 1903.
- [7] Hermes, O.: *Journal für Math.* 56 (1858), 241.
- [8] Herzer, A.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin. *Elem. Math.* 27 (1972), 52–56.
- [9] Joachimsthal, F.J.: Zur Theorie der dreiseitigen Pyramide. *Grunert Arch.* Bd. 32 (1859), 107–111.
- [10] Lenz, H.: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. *Math. Ann.* 128 (1954), 363–372.
- [11] Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* (1954), 17–72.
- [12] Schröter, H.: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde*. B.G. Teubner Verlag, Leipzig 1880.
- [13] Steiner, J.: *Journal für Math.* 2 (1827), 97.
- [14] Steiner, J.: *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin 1832.

Adolf Schleiermacher
 Rablstr. 18
 D–81669 München, Deutschland
 e-mail: adsle@aol.com

¹**Zusatz bei der Korrektur:** Zum Höhenhyperboloid im euklidischen Raum siehe auch H. Havlicek und G. Weiss in *Amer. Math. Monthly* 110, No. 8 (2003), 679–693. Der Autor dankt Herrn V. Pambuccian für diesen Hinweis.