
Une preuve de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = l.l \approx$ inspirée par Euler

Yves-François S. Pétermann

En 1874, F. Mertens [11, (13)] démontre ce qu’il appelle la *première formule de Legendre*¹,

$$\left\langle \sum_2^G \frac{1}{q} = l.l G + \mathfrak{E} - H + \delta, \right\rangle \quad (1)$$

où l désigne le logarithme naturel, q un nombre premier, où \mathfrak{E} est la constante d’Euler, $H := \sum_{k \geq 2} 1/k \sum 1/q^k$ (il donne la valeur $\mathfrak{E} - H = 0,2614972128\dots$), et où $|\delta| \leq 4l(G+1) + 2/(G l G)$. Sa preuve est élémentaire, mais loin d’être facile; elle ne fait appel à aucune hypothèse non démontrée, et donc en particulier n’utilise pas le théorème des nombres premiers qui ne sera établi que 22 ans plus tard. C’est essentiellement celle qu’on trouve dans la plupart des manuels de théorie analytique des nombres, à commencer par l’ouvrage classique de Landau [7, § 26–28]. (Citons également le non moins classique Hardy et Wright [6, Theorem 427]; parmi les ouvrages plus récents on pourra retenir ceux de Tenenbaum [12, Théorème I.1.9] et de Bateman et Diamond [1, Theorem 4.10]). La démonstration passe par un résultat auxiliaire, qu’on appelle maintenant fréquemment le *premier théorème de Mertens* [11, (5)]: “[...] wie gross auch n sei, ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\sum \frac{lq}{q} - l n \leq 2”$$

(où la somme est sur les premiers $q \leq n$, avec $n \geq 5$).

Edmund Landau [7, § 7] se réfère à la Formule de Legendre (1) en précisant “[...] deren Beweis Legendre und Tschebyschef erfolglos beschäftigt hatte [...]”. En réalité, chacun des deux auteurs, A.M. Legendre [8, 2ème et 3ème éd.] au début du 19ème siècle, et P.L.

1. A l’exception du commentaire suivant le “Theorema 7” d’Euler ci-dessous, j’ai choisi d’être très fidèle aux diverses notations (et dans la mesure du possible à la typographie) originales des auteurs anciens cités, et de revenir à une notation plus moderne dès que je ne cite plus un auteur. Ainsi des symboles différents pourront remplir le même rôle: j’espère que le lecteur ne m’en tiendra pas rigueur. J’utilise tout au long, malgré sa désuétude, la pratique et concise notation d’Euler “ l ” pour le logarithme naturel (“ $l.l$ ” pour $\log \log$).

Čebyšev² [2] dans les années 1850, démontre la formule, mais en utilisant sa version, conjecturale alors, du théorème des nombres premiers: pour Legendre, à qui on attribue habituellement la paternité de cette conjecture³ [8, 2ème éd. p. 394, 3ème éd. vol. 2 p. 65; voir aussi 1ère éd. p. 19] “*La formule qui résout cette question est*

$$y = \frac{x}{\log x - 1,08366} ”$$

– où, comme on le sait maintenant, la constante 1,08366 n’est pas optimale et doit être remplacée simplement par 1! Quant à Čebyšev, il considère une approximation asymptotiquement équivalente (et plus exacte, due essentiellement à P.J.G. Lejeune Dirichlet⁴), notant que “*l’intégrale*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

pour x très grand, exprime avec assez de précision combien il y a de nombres premiers inférieurs à x ”. Mais rien n’indique que ces deux auteurs aient tenté d’obtenir inconditionnellement – c’est-à-dire, à l’époque, sans utiliser le théorème des nombres premiers – cette formule, ni d’ailleurs une version plus faible de (1), comme par exemple

$$\sum_{\substack{p \leq X \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \sim l.l X \quad (X \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Pourtant en 1737 déjà Leonhard Euler [3] avait énoncé le théorème suivant, qui était bien connu de Čebyšev et de Mertens.

Theorema 19. *Summa series reciprocae numerorum primorum*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c.$$

est infinite magna; infinities tamen minor, quam summa seriei harmonicae $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.$ Atque illius summa est huius summae quasi logarithmus.

L’énoncé dans le titre de cette note [3] est la dernière ligne de la démonstration que donne Euler de ce théorème; dans la suite de symboles $l.l \infty$, l désigne le logarithme naturel, “logarithmus hyperbolicus” – $l.l$ étant ce même logarithme itéré – et ∞ désigne une quantité

2. Une transcription acceptable pour tous de caractères cyrilliques en caractères romains est parfois un vrai casse-tête. Excepté lorsque je reproduis une citation, j’ai finalement préféré l’écriture Čebyšev aux épellations Tchebichef, Tchebychef, Tchébicheff, Tschebyscheff, Tshebysheff, Chebyshev, Chebeshev ... (un survol de la littérature m’a livré en quelques minutes 16 transcriptions différentes du nom de ce mathématicien!) parce que c’est aussi le choix des Mathematical Reviews de l’A.M.S.

3. Il faut cependant mentionner une note manuscrite de C.F. Gauss datée de 1791, dans un livre qu’il possédait, où il écrit: “Primzahlen unter $a(= \infty) \frac{a}{l_a}$ ” (voir [5, [1] p. 11], et également [5, [9] p. 493 et [13] p. 495]). En référence à (1) ci-dessus mentionnons également une note dans le même livre datée de 1796 où il indique: “ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots \frac{1}{x} = (\text{pro } x \text{ inf.}) llx + V V \text{ esse Const. suspicor prope } 1,266\dots$ ” (voir [5, [3] p. 12]).

4. “[...] la véritable expression-limite étant $\sum \frac{1}{\log(n)}$.” Précision manuscrite de L.D. sur l’exemplaire de [9] (1838) envoyé à Gauss; voir [10, note **] en bas de page, p.372].

infinie. A la fin de son raisonnement, il écrit

$$“1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty”$$

puis quelques lignes après précise la “valeur” de cette somme, $l \infty$ (D’où le résultat, la somme infinie du théorème étant à son tour le logarithme de cette “somme harmonique”). Pour bien comprendre les sens distincts que donne Euler aux évaluations ∞ et $l \infty$ qu’il donne, on peut par exemple se référer à son travail ultérieur [4]. Euler pose (Exemplum 1, p. 228) $x = 1$ dans la relation

$$“l \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots”$$

et obtient donc

$$“l \frac{1}{1-1} = l \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots”$$

ce qui nous informe du comportement asymptotique de la série harmonique. Il note ensuite: “At Logarithmus numeri infinite magni ∞ ipse est infinite magnus, ex quo erit [...]”

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots = \infty,”$$

ce qu’aujourd’hui nous pourrions traduire par: “donc la série harmonique diverge”.

A cause de l’utilisation qu’il fait de nombres infinis – qui rebutaient moins les mathématiciens jusque vers le début du 19^{ème} siècle – on ne peut pas qualifier le raisonnement d’Euler de *preuve* au sens moderne du terme, et il me semble certain que déjà Čebyšev ne pouvait pas le considérer comme telle (Legendre, quant à lui, ne paraît gêné ni par l’énoncé ni par la démonstration du Théorème 7 d’Euler ci-dessous, puisqu’il utilise ce dernier comme un résultat établi). Euler proposera plus tard [4] un autre argument dont je parlerai aussi plus loin, et qui fait également appel à des nombres infinis.

Cependant les idées d’Euler contenues dans ses deux arguments de 1737 et 1748 peuvent être exploitées pour obtenir une preuve (“moderne”!) de (2), qui ne fait appel ni au premier théorème de Mertens, ni à celui des nombres premiers, et qui, s’il est vrai qu’elle nécessite un choix approprié de divers paramètres, n’en est pas moins conceptuellement beaucoup plus simple. Je ne conserve pas systématiquement la notation d’Euler; le symbolisme plus moderne et concis par lequel elle est par endroits remplacée devrait être reconnaissable. L’ingrédient essentiel utilisé par Euler est le résultat suivant de [3].

Theorema 7. *Factum continuum in infinitum ex his fractionibus $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18} \dots$ ubi numeratores sunt omnes numeri primi, denominatores vero unitate deficiunt a numerato-ribus. Hoc factum inquam aequale est summae huius seriei*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

estque adeo infinitum.

Euler établit cette relation ainsi. Il appelle x la somme de la série harmonique; il note que

$$\frac{1}{2}x = \sum_{m \equiv 0(2)} \frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}x = \sum_{m \neq 0(2)} \frac{1}{m};$$

puis que

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x = \sum_{\substack{m \neq 0(2) \\ m \equiv 0(3)}} \frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}x = \sum_{\substack{m \neq 0(2) \\ m \neq 0(3)}} \frac{1}{m};$$

&c. . . : finalement

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \&c.}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \&c.} x = \sum_{\substack{m \neq 0(p) \\ \text{pour tout nombre premier } p}} \frac{1}{m} = 1.$$

La principale difficulté se situe ici (et découle évidemment du fait que x n'est pas une quantité finie). Désignons par p_k le k -ème nombre premier. Si l'on tente de procéder de façon similaire pour produire la preuve correcte d'une relation entre deux quantités finies, en traitant par exemple la somme $x(y) := \sum_{m \leq y} 1/m$, on obtient après la k -ème étape une expression pour $\frac{(p_k-1) \cdots 2 \cdot 1}{p_k \cdots 3 \cdot 2} x(y)$ qui contient, à part la somme "principale"

$$\sum_{\substack{m \leq y \\ m \neq 0(p_i) \\ i=1, \dots, k}} \frac{1}{m},$$

une quantité exprimée par $2^k - 1$ autres sommes de termes de la forme $1/m$ (où m satisfait certaines conditions de divisibilité), et dont il semble très difficile de contrôler suffisamment la taille. On peut cependant s'inspirer de l'autre argument d'Euler (voir [4, § 272 sqq.], nous y reviendrons plus bas), et écrire

$$\frac{2 \cdot 3 \cdots p_k}{1 \cdot 2 \cdots (p_k - 1)} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{\substack{p|m \Rightarrow p=p_i \\ \text{pour un } i \in [1, k]}} \frac{1}{m}. \quad (3)$$

Euler démontre son Théorème 19 en utilisant son Théorème 7, et l'écriture en série de Taylor pour $l(p/(p-1)) = -l(1-1/p)$:

"Ponatur $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \&c. = A$ atque $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = B$ et $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. = C$. atque ita porro omnes potestates peculiaribus litteris designando; erit posito e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus est 1

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\&c.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.",$$

d'où, facilement,

$$A = l.l \infty. \quad (4)$$

Dans ce qui suit, afin d'adapter le raisonnement d'Euler aux exigences modernes, considérons un nombre réel positif X avec $p_k \leq X < p_{k+1}$. A l'aide de (3) nous obtenons

$$A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{4}A_4 + \dots \geq l \left(\sum_{m < p_{k+1}} \frac{1}{m} \right) \geq l \left(\sum_{m \leq X} \frac{1}{m} \right) \geq l.l X,$$

où l'on aura posé $A_\ell := \sum_{i \leq k} 1/p_i^\ell$, ce qui peut s'écrire

$$\sum_{p \leq X} \frac{1}{p} \geq l.l X - H \quad (X \geq 2), \tag{5}$$

où $H = .315718 \dots$ est la constante de Mertens en (1).

Pour terminer la démonstration de (2) il reste à vérifier l'inégalité complémentaire (et moins précise)

$$\sum_{p \leq X} \frac{1}{p} \leq l.l X (1 + o(1)) \quad (X \rightarrow \infty). \tag{6}$$

Mais il semble très difficile d'obtenir (6) directement à partir de (3), et que l'on ne peut pas éviter d'introduire, comme le fera Euler dans son autre preuve que nous suivons depuis là, une variable n et un produit (légitimement infini lorsque $n > 1$!) généralisant le "Theorema 7" ci-dessus [4, § 274] (voir également [3, Theorema 8]): "*si enim ponatur*

$$P = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \cdot \dots},$$

fiet

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \dots, \tag{7}$$

ubi omnes numeri naturales nullo excepto occurrunt." Euler pose [4, § 277]

$$"M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \dots,$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots"$$

Il en déduit, à l'aide de (7) [4, § 278], que

$$\begin{aligned} "lM - \frac{1}{2}lN &= +1 \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2^{5n}} + \frac{1}{3^{5n}} + \frac{1}{5^{5n}} + \frac{1}{7^{5n}} + \frac{1}{11^{5n}} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2^{7n}} + \frac{1}{3^{7n}} + \frac{1}{5^{7n}} + \frac{1}{7^{7n}} + \frac{1}{11^{7n}} + \dots \right) \\ &\dots" \end{aligned} \tag{8}$$

Au § 279 il note: “Si $n = 1$ erit $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c. = l \aleph$, & $N = \frac{\pi\pi}{6}$ ”. Il en déduit le résultat déjà cité

$$\left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \&c. = l.l \aleph \right\rangle. \quad (4)$$

Remarque. Il est de prime abord difficile de comprendre pourquoi Euler utilise ici la formule (8), puisque la soustraction effectuée de $\frac{1}{2}lN$ n’a pour effet sur la série qu’il obtient pour lM que de supprimer des termes dont la somme converge lorsque $n = 1$. La raison en est probablement un souci de généralité: dans l’exemple qu’il donne ensuite dans son ouvrage [4, § 280] la formule (8) lui livre en effet, lorsque cette fois $n = 2$, une série pour $l\frac{5}{2}$.

L’identité (8) est correcte lorsque $n > 1$. Elle peut se récrire

$$l\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n}\right) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^n} + \frac{1}{2}l\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}\right) + \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ impair}}} \left(\frac{1}{k} \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^{kn}}\right). \quad (9)$$

Plus simplement, si l’on tient compte de la remarque en italiques ci-dessus, on a

$$l\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n}\right) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^n} + \sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{k} \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^{kn}}\right). \quad (10)$$

Or des arguments élémentaires montrent, d’une part que la quantité $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} - \frac{1}{n-1}$ reste toujours comprise entre 0 et 1 lorsque $n > 1$, et d’autre part que la dernière somme de (10) converge uniformément pour tout $n \geq 1$ (les deux dernières sommes de (9) si l’on veut rester fidèle à (8)!). Ainsi nous avons

$$\sum \frac{1}{p^n} = l\left(\frac{1}{n-1}\right) + O(1) \quad (n \rightarrow 1^+).$$

Posons maintenant, mettons pour $X > X_0$, $n := (lX f(X))^{-1} + 1$, où $f(X) = o(lX)$ ($X \rightarrow \infty$). Alors les relations

$$l\left(\frac{1}{n-1}\right) = l.lX + l f(X)$$

$$X^{n-1} = e^{(f(X))^{-1}}$$

et

sont satisfaites. Ainsi si $p \leq X$, alors $p^n \leq pe^{(f(X))^{-1}}$, et donc

$$e^{-f(X)^{-1}} \sum_{p \leq X} \frac{1}{p} \leq \sum_{p \leq X} \frac{1}{p^n} \leq \sum_p \frac{1}{p^n} = l.lX + l f(X) + O(1) \quad (X > X_0).$$

Le choix $f(X) = l.lX$ (pour $X > e$) livre l’estimation (optimale avec cette méthode)

$$\sum_{p \leq X} \frac{1}{p} \leq l.lX + l.l.lX + O(1) \quad (X > e),$$

ce qui termine la démonstration de (6), et donc de (2).

Remerciements. Je tiens à remercier Gerhard Wanner pour sa lecture attentive de la version précédente de cette note, pour ses remarques pertinentes, et en particulier pour l'amélioration (5) d'une inégalité antérieure.

Références

- [1] Bateman, P.T.; Diamond, H.G.: *Analytic number theory. An introductory course*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ 2004.
- [2] Čebyšev, P.L.: Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers. *Mémoires présentés à l'Académie Impériale des Sciences de St-Petersbourg par divers savants VI* (1851), 141–157. *J. Math. Pures Appl.* (1) XVII (1852), 341–365.
- [3] Euler, L.: Variæ observationes circa series infinitas. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 (1737), 160–188; quoque in: *Opera Omnia, Series Prima, Opera Mathematica*, Volumen Quartum Decimum, Teubner, 1925.
- [4] Euler, L.: *Introductio in Analysin Infinitorum. Tomus Primus*. Bousquet, Lausanne 1748; quoque in: *Opera Omnia, Series Prima, Opera Mathematica*, Volumen Octavum, Teubner, 1922.
- [5] Gauss, C.F.: *Werke. Band X. Abt. I*. Teubner, Leipzig 1917; Nachdruck Georg Olms Verlag, Hildesheim und New York 1973.
- [6] Hardy, G.H.; Wright, E.M.: *An introduction to the theory of numbers*. Oxford at the Clarendon Press. XVI, 1938; fifth edition, 1979.
- [7] Landau, E.: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Teubner, Leipzig und Berlin 1909; third edition, Chelsea, 1974.
- [8] Legendre, A.-M.: *Essai sur la Théorie des nombres*. Paris, Duprat An VI (1797 ou 98); Seconde édition, Paris, Courcier 1808; Troisième édition en deux volumes, Paris, Firmin Didot, 1830.
- [9] Lejeune Dirichlet, P.G.J.: Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, *J. Reine Angew. Math.* 18 (1838), 259–274.
- [10] Lejeune Dirichlet, P.G.J.: *Werke. Erster Band*. Herausg. Königl. Preuss. Akad. Wiss. von L. Kronecker, Berlin, G. Reimer, 1889.
- [11] Mertens, F.: Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. *J. Reine Angew. Math.* 78 (1874), 46–62.
- [12] Tenenbaum, G.: *Introduction la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Institut Élie Cartan, Université de Nancy I. 13, 1990; deuxième édition. Cours Spécialisés 1. Société Mathématique de France, Paris 1995.

Y.-F.S. Pétermann

Université de Genève

Section de Mathématiques

Case Postale 64

CH–1211 Genève 4, Suisse

e-mail: Petermann@math.unige.ch