
Über eine bemerkenswerte Eigenschaft von Dezimalbrüchen und gewissen anderen Systembrüchen

Stefan Deschauer

Stefan Deschauer studierte Mathematik, katholische Theologie und Erziehungswissenschaften an der Universität Marburg. Nach der Promotion in Ulm und einigen Jahren im Schuldienst war er an den Universitäten Eichstätt und Erlangen tätig, bevor er 1994 den Ruf auf eine Professur für Didaktik der Mathematik an der TU Dresden annahm.

Während eines Unterrichtsbesuchs in einer 7. Klasse eines Dresdner Gymnasiums sollte eine Schülerin den Dezimalbruch 2,5 in einen gemeinen Bruch verwandeln. Ihre spontane Antwort war „ $\frac{2}{5}$ “, dann korrigierte sie und gab „ $\frac{5}{2}$ “ an. Für den Mathematiker ergab sich sogleich folgende Frage:

Gibt es weitere endliche Dezimalbrüche, deren Wert mit dem Quotienten aus der natürlichen Zahl, die aus den Nachkommastellen gebildet wird, und der Vorkommazahl übereinstimmt?

Zu welchen Ergebnissen führt die entsprechende Untersuchung bei g -adischen Systembrüchen?

Der Reiz dieses keineswegs trivialen Problems besteht darin, dass die Fragestellung eigentlich so naheliegend ist, wichtige Teillösungen mit Methoden der elementaren Zahlentheorie gewonnen werden können und genügend offene Fragen bleiben.

Eine fehlerhafte Umwandlung von 2,5 (in $\frac{2}{5}$) im Unterricht machte den Autor auf die augenfällige Darstellung $2,5 = \frac{5}{2}$ aufmerksam. Gibt es im Dezimalsystem noch weitere solcher Darstellungen, wobei die (ein- oder mehrstellige) Vorkommazahl mit dem Nenner und die (ein- oder mehrstellige) Nachkommazahl mit dem Zähler des gemeinen Bruchs übereinstimmt? Der elementare, aber attraktive Weg zur (negativen) Antwort weckt Neugier auf die Situation in anderen g -adischen Systemen. Ohne Weiteres findet man unendlich viele g mit mindestens einer Darstellung (in obigem Sinne). Schwieriger ist es zu zeigen, dass sogar unendlich viele g mit mindestens zwei Darstellungen existieren, und diese explizit anzugeben.

1 Dezimalbrüche

Wir betrachten also allgemein Dezimalbrüche

$$a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, \quad a \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq a_v \leq 9 \quad (0 \leq v \leq n)$$

mit der Eigenschaft

$$a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \frac{z}{a}, \quad z = \sum_{v=0}^n a_v \cdot 10^v < 10^{n+1}. \quad (1)$$

Es folgt nach Multiplikation mit $10^{n+1} \cdot a$:

$$10^{n+1} \cdot a^2 + az = 10^{n+1} \cdot z \quad (2)$$

mit $a^2 + a < 10^{n+1}$ wegen $10^{n+1} \cdot a^2 = (10^{n+1} - a)z < (10^{n+1} - a)10^{n+1}$.

1.1 Analyse des Terms für z

Wir können nun nach z auflösen und den entstehenden Term studieren. Es gilt

$$z = \frac{10^{n+1} \cdot a^2}{10^{n+1} - a}. \quad (3)$$

Eine Umformung des Terms für z führt zu

$$z = a^2 + q, \quad q = \frac{a^3}{10^{n+1} - a} \in \mathbb{N}^* \quad \text{mit } a^2 < 10^{n+1} - a = \frac{a^3}{q}, \text{ also } q < a.^1 \quad (4)$$

Letzteres ergibt sich auch aus der Identität

$$\frac{z}{10^{n+1}} = \frac{q}{a}. \quad (5)$$

Gemäß (4) oder (5) betrachten wir die multiplikative Darstellung

$$a(a^2 + q) = 10^{n+1}q, \quad q < a. \quad (6)$$

Mit der Zerlegung

$$q = 2^s \cdot 5^t \cdot q' \cdot q'', \quad s, t \geq 0, \quad (10, q' \cdot q'') = 1, \quad q' | a, \quad q'' | (a^2 + q) \quad (7)$$

– die Wahl von q' und q'' ist zunächst nicht notwendig eindeutig – ergeben sich die Darstellungen

$$a = 2^i \cdot 5^k q', \quad 0 \leq i \leq n+1+s, \quad 0 \leq k \leq n+1+t \quad (8)$$

mit $i+k \geq 1$ wegen $q < a$;

$$a^2 + q = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot q''. \quad (9)$$

(Wiederum sind nicht beide Potenzen = 1.)

¹Insgesamt gilt $z = a^2 + q < a^2 + a < 10^{n+1}$.

Andererseits ist

$$\frac{a^2 + q}{q''} = \frac{2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot q'^2 + 2^s \cdot 5^t \cdot q'q''}{q''} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot \frac{q'^2}{q''} + 2^s \cdot 5^t \cdot q', \quad (10)$$

so dass wegen der Bedingung der Teilerfremdheit in (7) gilt:

$$q'' | q'^2. \quad (11)$$

Darüber hinaus ergibt sich aus (10) und (9)

$$\frac{a^2 + q}{q'} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot q' + 2^s \cdot 5^t \cdot q'' = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot \frac{q''}{q'}$$

mit $q' | q''$ und

$$\frac{a^2 + q}{q'^2} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} + 2^s \cdot 5^t \cdot \frac{q''}{q'} = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot \frac{q''}{q'^2} \quad (12)$$

mit

$$q'^2 | q''. \quad (13)$$

Mit (11) folgt

$$q'' = q'^2 \quad \text{und daher} \quad q = 2^s \cdot 5^t \cdot q'^3 \quad (\text{gemäß (7)}). \quad (14)$$

Weiterhin ergibt sich nun aus (12)

$$q' = \frac{2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} - 2^{2i} \cdot 5^{2k}}{2^s \cdot 5^t} = 2^{n+1-i} \cdot 5^{n+1-k} - 2^{2i-s} \cdot 5^{2k-t} \quad (15)$$

mit den im Vergleich zu (7) und (8) eingeschränkten Exponentenbedingungen
 $0 \leq i, k \leq n+1$, $0 \leq s \leq 2i$, $0 \leq t \leq 2k$.

Wegen (10), $q' = 1$ reduziert sich (15) zunächst auf vier Darstellungsformen für q' :

$$i = k = n+1, \quad 0 \leq s, t \leq 2n+2 : q'_1 = 1 - 2^{2n+2-s} \cdot 5^{2n+2-t}, \quad (16)$$

$$s = 2i, \quad t = 2k, \quad 0 \leq i, k \leq n+1 : q'_2 = 2^{n+1-i} \cdot 5^{n+1-k} - 1, \quad (17)$$

$$k = n+1, \quad s = 2i, \quad 0 \leq i \leq n+1, \quad 0 \leq t \leq 2n+2 : q'_3 = 2^{n+1-i} - 5^{2n+2-t}, \quad (18)$$

$$i = n+1, \quad t = 2k, \quad 0 \leq k \leq n+1, \quad 0 \leq s \leq 2n+2 : q'_4 = 5^{n+1-k} - 2^{2n+2-s}. \quad (19)$$

Dabei scheidet (16) von vornherein aus wegen $q'_1 \leq 0$. Die anderen q' sind auch noch hinsichtlich des Kriteriums $q < a$ zu untersuchen. Nach (14) und (8) ist $q < a$ äquivalent zu

$$q'^2 < 2^{i-s} \cdot 5^{k-t}, \quad (20)$$

und die Wahl von s und t in (17) führt wiederum zu keinem $q' \geq 1$. Im Fall (18) müsste $1 \leq q'_3 < \frac{5^{n+1-t}}{2^i} \leq 5^{n+1-t}$ mit $t \leq n$ gelten im Widerspruch zur Abschätzung $q'_3 =$

$2^{n+1-i} - 5^{2n+2-i} \leq 2^{n+1} - 5^{n+2} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Entsprechende Überlegungen führen nur bei q_4' zu keinem Widerspruch. Nach (19) und (20) gilt es nun, q_4' zu finden mit

$$1 \leq q_4'^2 < 2^{n+1-s} \cdot 5^{-k}. \quad (21)$$

Hieraus folgt $5^k < 2^{n+1-s}$ mit $s \leq n$ und mit (19) $2^s \cdot 5^{2k} < 2^{2n+2-s} < 5^{n+1-k}$ wegen $q_4' \geq 1$. Daher gilt $2^s < 5^{n+1-3k}$ mit $k \leq \frac{n}{3}$, insgesamt also eine Verschärfung der Bedingungen für s, k gegenüber (19). Für die weiteren Überlegungen genügen aber die Schranken $0 \leq s, k \leq n$. Setzt man gemäß (19)

$$(1 \leq) q_4' = u - v \quad \text{mit } u := 5^{n+1-k} \quad \text{und } v := 2^{2n+2-s}, \quad (22)$$

so erhält man nach Division von $q_4'^2$ durch uv infolge von (21) die obere Abschätzung

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 2 < \frac{1}{10^{n+1}}. \quad (23)$$

1.2 Bestimmung von u und v

Wir betrachten zuerst den Fall $n \geq 1$ und nehmen zunächst an, dass

$$u_k(n) > v_s(n) \wedge u_k(n-1) > v_s(n-1), \quad 0 \leq s, k \leq n, \quad (24)$$

gilt, wobei $u_k(n-1) = 5^{n-k}$ und $v_s(n-1) = 2^{2n-s}$ ist. Dafür ist k auf $0 \leq k \leq n-1$ einzuschränken. Dann kann die linke Seite von (23) folgendermaßen nach unten abgeschätzt werden:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{u_k(n-1)}{v_s(n-1)} + \frac{4}{5} \cdot \frac{v_s(n-1)}{u_k(n-1)} - 2 > \frac{5}{4} + \frac{4}{5} - 2 = \frac{1}{20} > \frac{1}{10^{n+1}}. \quad (25)$$

Dazu beachte man, dass die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ für $x > 1$ streng monoton wächst und $x = \frac{5}{4} \cdot \frac{u}{v}$ ein Produkt aus zwei Faktoren ist, die beide 1 übersteigen. (24) lässt sich also mit (23) nicht vereinbaren. Es verbleibt jetzt noch der Fall

$$u_k(n) > v_s(n) \wedge u_k(n-1) < v_s(n-1), \quad 0 \leq s, k \leq n. \quad (26)$$

Äquivalent dazu ist die Ungleichungskette

$$\frac{2^{2n+2}}{5^{n+1}} < \frac{2^s}{5^k} < \frac{2^{2n}}{5^n}. \quad (27)$$

Mithilfe des Faktors $\frac{5^3}{2^7} = \frac{125}{128}$, der noch näher bei 1 liegt als $\frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}$, lässt sich $\frac{2^{2n}}{5^n}$ mehrfach passend verkleinern, womit konkrete $\frac{2^s}{5^k}$ unter der Bedingung (27) erzeugt werden können. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{4}{5} < \frac{5^{3l}}{2^{7l}} < 1$, $l \in \mathbb{N}$, genau dann gilt, wenn l im

Intervall $[1; 9]$ liegt. Damit können s und k die folgenden Werte annehmen, womit eine weitere Einschränkung von n verbunden ist:

$$s = 2n - 7l, \quad k = n - 3l, \quad n \geq \frac{7}{2}l, \quad l = 1, \dots, 9. \quad (28)$$

Gibt es noch andere s und k , die (27) erfüllen? Hierzu betrachten wir die zu (27) äquivalente Ungleichungskette

$$2^{2n+2-s} < 5^{n+1-k} < 2^{2n-s} \cdot 5. \quad (29)$$

Wegen $0 \leq s \leq n$ ist $2^{2n+2-s} \geq 8$ mit der Folge $k \leq n - 1$ und rechts $s \leq 2n - 3$. Nun beginnt ein hübscher „Schaukel-Algorithmus“: Man erhält weiter $2^{2n+2-s} \geq 32$ und $k \leq n - 2$, so dass rechts $s \leq 2n - 5$ folgt. Dann ist aber $2^{2n+2-s} \geq 128$, $k \leq n - 3$ und rechts $s \leq 2n - 7$. Damit ergibt sich aus (29)

$$512 \cdot 2^{2n-7-s} < 625 \cdot 5^{n-3-k} < 128 \cdot 2^{2n-7-s} \cdot 5 \quad (30)$$

mit ausschließlich nicht-negativen Exponenten, wobei aber jetzt die Schranken von k und s stagnieren. Das Verfahren bricht an dieser Stelle ab. Aus (27) bzw. (29) folgt also einerseits die Exponentenbedingung

$$s \leq 2n - 7 \quad \text{und} \quad k \leq n - 3, \quad (31)$$

andererseits erweist sich der Fall $l = 1$ in (28) wieder als eine Lösung von (27), wie man an der gültigen Ungleichungskette $512 < 625 < 128 \cdot 5$ in (30) erkennt. $s = 2n - 7$ und $k = n - 3$ sind also die maximalen Exponenten, für die die Ungleichungskette (27) erfüllt ist. s und k mit $l = 2$ in (28) müssen nun die zweithöchsten Exponenten sein, denn angenommen, (27) würde durch ein Paar (s, k) mit $2n - 14 < s < 2n - 7$, $n - 6 < k < n - 3$ erfüllt, dann ergäbe sich wegen $\frac{2^s}{5^k} \cdot \frac{2^7}{5^3} < \frac{2^{2n}}{5^n}$ auch noch für $(s + 7, k + 3)$ mit $2n - 7 < s + 7 < 2n$, $n - 3 < k + 3 < n$ eine Lösung. Diese Exponentenbedingungen widersprechen aber (31).

Da sich diese Überlegung für alle $l = 3, \dots, 9$ fortsetzen lässt, sind mit (28) tatsächlich alle Lösungen von (27) erfasst. Nach (22) folgt nun

$$\frac{u_k(n)}{v_s(n)} + \frac{v_s(n)}{u_k(n)} - 2 = \frac{5}{4} \left(\frac{125}{128} \right)^l + \frac{4}{5} \left(\frac{128}{125} \right)^l - 2. \quad (32)$$

Die Funktion auf der rechten Seite fällt offenbar streng monoton mit l . Das Minimum wird also für $l = 9$ angenommen und ist größer als $9 \cdot 10^{-5}$. Andererseits lässt sich die rechte Seite von (23) mit

$$\frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^{\frac{7}{2}+l}} \quad (33)$$

nach oben abschätzen, wobei das Maximum für $l = 1$ angenommen wird und kleiner als $4 \cdot 10^{-5}$ ist. Damit gilt auch hier $\frac{u_k(n)}{v_s(n)} + \frac{v_s(n)}{u_k(n)} - 2 > \frac{1}{10^{n+1}}$ im Widerspruch zu (23).

Unser Problem ist also auf $n = 0$ reduziert. Es folgt $s = k = 0$, $u_0(0) = 5$, $v_0(0) = 4$, $\frac{u_0(n)}{v_0(n)} + \frac{v_0(n)}{u_0(n)} - 2 = \frac{1}{20} < \frac{1}{10^1}$ gemäß (23), $q'_4 = 1$ mit $i = 1$, $t = 0$ nach (19), $q = 1$ nach (14), $a = 2$ nach (8), $z = a_0 = 5$ nach (4) und (1). Damit gilt

Satz 1. *2,5 ist der einzige Dezimalbruch, der die Eigenschaft (1) besitzt.*

2 g-adische Systembrüche

Im Weiteren wollen wir nun allgemein g -adische Systembrüche $a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, $a \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_\nu \leq g - 1$ ($0 \leq \nu \leq n$) mit der Eigenschaft

$$(a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g = \frac{z}{a}, \quad z = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cdot g^\nu < g^{n+1}, \quad (1')$$

betrachten.

2.1 $g = p^\alpha$, p Primzahl, $\alpha \geq 1$

Die Schritte (2)–(15) für $g = 10$ lassen sich weitgehend analog auf $g = p^\alpha$ übertragen: Mit den alten Bezeichnungen erhält man jetzt $q'' = q'^2$, $q = p^s \cdot q'^3$ und schließlich

$$q' = p^{\alpha(n+1)-i} - p^{2i-s} \quad (15')$$

mit den Exponentenbedingungen $1 \leq i \leq \alpha(n+1)$, $0 \leq s \leq 2i$.

Wegen $(p, q') = 1$ reduziert sich (15') nun auf nur zwei Darstellungsformen für q' :

$$1 \leq i = \alpha(n+1), \quad 0 \leq s \leq 2\alpha(n+1) : q'_1 = 1 - p^{2\alpha(n+1)-s}, \quad (16')$$

$$s = 2i, \quad 1 \leq i \leq \alpha(n+1) : q'_2 = p^{\alpha(n+1)-i} - 1. \quad (17')$$

Einerseits gilt $q'_1 \leq 0$, andererseits ist $q < a$ wegen $a = p^i \cdot q'$ jetzt äquivalent zu (20') $q'^2 < p^{i-s}$, so dass für $q' = q'_2$ mit $s = 2i$ folgt: $q'_2{}^2 < p^{-i} \leq p^{-1}$ – im Widerspruch zu $q'_2 \geq 1$. Daher gilt

Satz 2. *Ist $g > 1$ eine Primzahlpotenz, so gibt es im zugehörigen g -adischen System keine Darstellung gemäß (1').*

2.2 g-adische Systeme mit mindestens einer Darstellung²

Ersetzt man 10 durch g , so erhält man

$$\frac{z}{g^{n+1}} = \frac{q}{a} \quad (5')$$

²Unter einer „Darstellung“ sei hier und im Folgenden die Darstellung gemäß (1') gemeint.

mit

$$z = a^2 + q, \quad q = \frac{a^3}{g^{n+1} - a} < a. \quad (4')$$

Daraus folgt unmittelbar

Satz 3. Ein g -adisches System hat genau dann mindestens eine Darstellung, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein natürliches q , $1 \leq q < a$, $q|a^3$, existieren mit $g^{n+1} = \frac{a^3}{q} + a$. Die zugehörige Darstellung ist

$$(a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g = \frac{a^2 + q}{a}, \quad a^2 + q = \sum_{v=0}^n a_v \cdot g^v.$$

Beispiele. $n = 0$ (Darstellung bezogen auf 1 Nachkommastelle):

$$q = 1, a = 2: g = 10, (2, 5)_{10} = \frac{5}{2}$$

$$q = 4, a = 6: g = 60, (6, [40])_{60} = \left(\frac{[40]}{6}\right)_{60} \text{ (gemeinsamer Wert: } 6\frac{2}{3})^3$$

$n = 1$ (Darstellung bezogen auf 2 Nachkommastellen):

$$q = 2, a = 4: g = 6, (4, 30)_6 = \left(\frac{30}{4}\right)_6 \text{ (gemeinsamer Wert: } 4\frac{1}{2})$$

$$q = 27, a = 36: g = 42, ([36], [31][21])_{42} = \left(\frac{[31][21]}{[36]}\right)_{42} \text{ (gemeinsamer Wert: } 36\frac{3}{4})$$

Bemerkung. Die Frage, ob es Darstellungen gibt, die sich auf mehr als 2 Nachkommastellen beziehen ($n \geq 2$), ist offen.

Wir wollen nun die folgende Tabelle studieren, in der alle Werte g unterhalb von 10000 mit $g = \frac{a^3}{q} + a$ unter der Bedingung $1 \leq q < a$, $q|a^3$ ($n = 0$) der Größe nach aufgelistet sind, und zur weiteren Theoriebildung beitragen.

10 2 * 1	30 3 * 1	36 4 * 2 = 6 ²	60 6 * 4	68 4 * 1	78 6 * 3		
114 6 * 2	130 5 * 1	135 10 * 8	136 8 * 4				
204 12 * 9	210 10 * 5	222 6 * 1	228 12 * 8	252 9 * 3	260 10 * 4	264 8 * 2	
300 12 * 6	350 7 * 1	357 14 * 8	390 15 * 9				
406 14 * 7	444 12 * 4						
504 18 * 12	510 10 * 2	520 8 * 1 = 20 * 16	528 16 * 8	588 12 * 3			
666 18 * 9	690 15 * 5						

³Einziffrige Zahlen werden durch eckige Klammern gekennzeichnet, um Missverständnisse zu vermeiden.

700 14 *4	738 9 *1	747 18 *8	792 24 *18				
820 20 *10	876 12 *2	888 24 *16					
990 18 *6 = 22 *11							
1010 10 *1	1020 20 *8	1030 30 *27	1040 16 *4	1050 21 *9			
1110 30 *25	1140 15 *3	1155 30 *24	1176 24 *12				
1342 11 *1	1344 21 *7	1353 22 *8	1364 33 *27	1378 26 *13	1380 30 *20	1386 14 *2	
1400 28 *16	1476 18 *4	1494 36 *32	1530 30 *18	1560 24 *9	1596 28 *14	1620 20 *5	
1740 12 *1	1750 35 *25	1752 24 *8	1764 36 *27 = 42 ²	1830 30 *15	1962 18 *3	1980 36 *24	
2020 20 *4	2040 40 *32	2064 16 *2	2080 32 *16	2100 42 *36			
2210 13 *1	2214 27 *9	2223 26 *8	2236 39 *27	2280 30 *12	2328 24 *6	2346 34 *17	
2600 40 *25	2628 36 *18	2684 22 *4	2688 42 *28				
2706 44 *32	2730 30 *10	2758 14 *1	2772 28 *8	2786 42 *27	2926 38 *19	2934 18 *2	2952 36 *16
3030 30 *9	3108 21 *3	3120 48 *36	3129 42 *24	3150 25 *5	3164 28 *7	3175 50 *40	3240 40 *20
3300 33 *11	3390 15 *1	3405 30 *8	3420 45 *27	3480 24 *4	3504 48 *32	3570 42 *21	
3640 56 *49	3690 45 *25	3916 44 *22	3924 36 *12	4020 20 *2	4026 33 *9	4040 40 *16	4060 60 *54
4112 16 *1	4128 32 *8	4144 48 *27	4158 42 *18	4278 46 *23	4380 60 *50		
4420 26 *4	4428 54 *36	4446 52 *32	4530 30 *6	4560 60 *48	4602 39 *13	4632 24 *3	4656 48 *24
4860 60 *45	4930 17 *1	4947 34 *8	4964 51 *27	4981 68 *64	5050 50 *25	5166 63 *49	5220 36 *9
5334 42 *14	5346 22 *2	5368 44 *16	5390 66 *54	5430 30 *5	5460 52 *26 = 60 *40	5516 28 *4	5544 56 *32
5850 18 *1	5868 36 *8	5886 54 *27	5904 72 *64	6060 60 *36			
6120 45 *15	6160 35 *7	6192 48 *18	6195 70 *56	6216 42 *12	6300 50 *20	6328 56 *28	6440 40 *10
6588 27 *3	6600 66 *44	6615 54 *24	6630 39 *9	6669 78 *72	6710 55 *25	6780 30 *4	6786 58 *29
6810 60 *32	6878 19 *1	6897 38 *8					
6916 57 *27	6930 70 *50	6935 76 *64	6936 24 *2	6960 48 *16	6984 72 *54	7070 70 *49	7260 60 *30
7750 62 *31	7788 44 *11	7812 36 *6	7848 72 *48	7854 51 *17			

8020 20 * 1	8040 40 * 8	8052 66 * 36	8060 60 * 27	8080 80 * 64	8224 32 * 4	8256 64 * 32	8274 42 * 9
8316 84 * 72	8610 35 * 5	8645 70 * 40	8700 60 * 25	8778 66 * 33			
8802 54 * 18	8814 26 * 2	8840 52 * 16	8866 78 * 54	9030 30 * 3	9060 60 * 24	9090 90 * 81	
9204 78 * 52	9264 48 * 12	9282 21 * 1	9303 42 * 8	9316 68 * 34	9324 63 * 27	9345 84 * 64	9394 77 * 49
9450 75 * 45	9492 84 * 63	9804 57 * 19	9810 90 * 75	9860 34 * 4	9870 70 * 35	9894 68 * 32	

Tabelle 1 für $2 \leq g \leq 10000$, $g = a * q := \frac{a^3}{q} + a$, $1 \leq q < a$, $q|a^3$

Nach Satz 2 treten für g keine Primzahlpotenzen auf, so dass g mindestens zwei verschiedene Primfaktoren enthält. Speziell gibt es Zahlen g , die sich in genau zwei verschiedene Primfaktoren zerlegen lassen, z.B. 10 und 4981 (= 17 · 293).

Es kommen gerade und ungerade g vor, wobei alle Endziffern ausgeschöpft werden, aber die geraden g dominieren (in der Tabelle) bei Weitem. Ungerades g zieht offenbar gerades a nach sich. Darüber hinaus erhält man sofort folgendes Kriterium:

$$\begin{aligned} g \text{ ist ungerade genau dann, wenn gilt:} \\ a = 2^i a', \quad q = 2^{3i} q', \quad i \geq 1, \quad a', \quad q' \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei gilt $q'|a^3$. Weiterhin hat g die Produktdarstellungen

$$g = \frac{a}{(a, q)} \cdot \left(\frac{a^2}{(a, q)} + (a, q) \right) = \frac{a}{(a, q)} \cdot \left(\frac{(a, q)^2}{(a, q)} \cdot \left(\frac{a}{(a, q)} \right)^2 + (a, q) \right). \quad (35)$$

In diesem Zusammenhang bietet sich auch an, die Werte q zu klassifizieren:

$$(q < a) \wedge (q|a), \quad (36)$$

$$(q < a) \wedge (q \nmid a) \wedge (q|a^2), \quad (36')$$

$$(q < a) \wedge (q \nmid a^2) \wedge (q|a^3). \quad (36'')$$

In den Fällen (36) und (36') lässt sich (35) vereinfachen, und man erhält $g = \frac{a}{q} \cdot (a^2 + q)$

bzw. $g = \frac{a}{(a, q)} \cdot (a, q) \cdot \left(\frac{a^2}{q} + 1 \right)$, wobei kein Faktor gleich 1 ist. Man sieht direkt – auch ohne Rückgriff auf das Kriterium (34) – leicht ein, dass in diesen Fällen g stets gerade ist.

2.3 g -adische Systeme mit mindestens zwei Darstellungen

In der Tabelle 1 fallen weiterhin die Werte $g = 520, 990, 5460$ auf, die nach Satz 3 (Fall $n = 0$) jeweils mindestens zwei verschiedene auf die 1. Nachkommastelle bezogene Dar-

stellungen besitzen, und zwar

$$(8, [65])_{520} = \left(\frac{[65]}{8} \right)_{520} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 8\frac{1}{8} \right),$$

$$([20], [416])_{520} = \left(\frac{[416]}{[20]} \right)_{520} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 20\frac{4}{5} \right)$$

bzw.

$$([18], [330])_{990} = \left(\frac{[330]}{[18]} \right)_{990} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 18\frac{1}{3} \right),$$

$$([22], [495])_{990} = \left(\frac{[495]}{[22]} \right)_{990} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 22\frac{1}{2} \right)$$

bzw.

$$([52], [2730])_{5460} = \left(\frac{[2730]}{[52]} \right)_{5460} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 52\frac{1}{2} \right),$$

$$([60], [3640])_{5460} = \left(\frac{[3640]}{[60]} \right)_{5460} \quad \left(\text{gemeinsamer Wert: } 60\frac{2}{3} \right)$$

und möglicherweise noch weitere, falls für diese g außerdem noch die Identität $g^{n+1} = \frac{b^3}{r} + b$ ($r < b$, $r|b^3$) für ein $n \geq 1$ gilt. (Im Bereich der Tabelle 1 ist dies nicht der Fall.)

Es stellt sich nun natürlicherweise die Frage, ob es unendlich viele g mit (mindestens) zwei Darstellungen gibt und ob man gegebenenfalls zumindest eine unendliche Teilmenge dieser g konkret angeben kann.

Dabei sollen zwei Darstellungen bezüglich g , die sich jeweils auf die 1. Nachkommastelle beziehen, als *1/1-Darstellungen* von g bezeichnet werden. Außerdem gehen wir noch kurz auf *1/2-Darstellungen* von g ein, d.h. auf Darstellungen bezüglich g , von denen sich die eine auf die 1. Nachkommastelle, die andere auf die ersten beiden Nachkommastellen bezieht.

2.3.1 g -adische Systeme mit 1/1-Darstellungen

Hier sind g zu finden mit

$$g = \frac{a^3}{q} + a = \frac{b^3}{r} + b, \quad a \neq b, \quad q < a, \quad q|a^3, \quad r < b, \quad r|b^3. \quad (37)$$

Sei o.B.d.A. $a < b$. Die Tabelle 1 lieferte die Beispiele $g = 520$, $g = 990$ und $g = 5460$. Wir wollen nur den speziellen Fall $q|a$, $r|b$ betrachten, wie er für $g = 990$ vorliegt, und erhalten mit $a = \lambda q$, $b = \mu r$, $1 < \lambda \leq a$, $1 < \mu \leq b$

$$g = a(\lambda a + 1) = b(\mu b + 1), \quad 2 \leq \mu < \lambda, \quad (37')$$

bzw.

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu b + 1}{\lambda a + 1}, \quad \mu|b, \quad \lambda|a, \quad 2 \leq \mu < \lambda. \quad (38)$$

Mit $s = (a, b)$ schreiben wir $a = \alpha s, b = \beta s$:

$$\frac{\alpha s}{\beta s} = \frac{\mu \beta s + 1}{\lambda \alpha s + 1}, \quad \alpha < \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \mu | \beta s, \quad \lambda | \alpha s, \quad 2 \leq \mu < \lambda. \quad (38')$$

Für die Zahl k , mit der der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ zu $\frac{\mu \beta s + 1}{\lambda \alpha s + 1}$ erweitert wird, gilt $k = \frac{\lambda \alpha s - \mu \beta s}{\beta - \alpha}$, woraus einerseits $k + \lambda s = \frac{(\lambda - \mu) \beta s}{\beta - \alpha}$, andererseits $k + \mu s = \frac{(\lambda - \mu) \alpha s}{\beta - \alpha}$ folgt. Somit ergibt sich

$$\beta - \alpha | (\lambda - \mu) s. \quad (39)$$

Wir nehmen nun eine erneute Spezialisierung vor:

$$\beta - \alpha = (\lambda - \mu) s. \quad (39')$$

Dann ist

$$k + \lambda s = \beta, \quad k + \mu s = \alpha, \quad (40)$$

und wegen der Erweiterungseigenschaft von k ergibt sich aus (38'):

$$k(k + \mu s) = \mu(k + \lambda s)s + 1, \quad k(k + \lambda s) = \lambda(k + \mu s)s + 1.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man

$$k^2 - 1 = \mu \lambda s^2, \quad (41)$$

was nach (40) zu $k^2 - 1 = (\alpha - k)(\beta - k)$ mit $k = \frac{\alpha \beta + 1}{\alpha + \beta}$ führt, woraus wieder wegen (40) die Darstellungen

$$\mu s = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + \beta}, \quad \lambda s = \frac{\beta^2 - 1}{\alpha + \beta}, \quad (42)$$

folgen. Einzellösungen des Systems (42) unter den Bedingungen aus (38') sind nun leicht zu finden. Wählt man z.B. $\mu = s = 2$ und α ungerade, d.h. $\alpha = 2\gamma - 1$, so ist nach (42) $\beta = \gamma^2 - 3\gamma + 1$ und $\lambda = \frac{1}{2}(\gamma - 2)(\gamma - 3)$. Dabei muss nach (38) $\gamma \geq 5$ sein. Es folgt

$$\frac{(2\gamma - 1) \cdot 2}{(\gamma^2 - 3\gamma + 1) \cdot 2} = \frac{2(\gamma^2 - 3\gamma + 1) \cdot 2 + 1}{\frac{1}{2}(\gamma - 2)(\gamma - 3)(2\gamma - 1) \cdot 2 + 1}. \quad (38'')$$

Hier ist $\mu | \beta s$ trivialerweise allgemein erfüllt. $2 = \mu < \lambda \wedge \lambda | \alpha s$ kann offenbar nur für endlich viele α erfüllt sein, hier für $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 11$ mit $\lambda_1 = 3$ oder $\alpha_2 = 15, \beta_2 = 41$ mit $\lambda_2 = 15$. Damit erhält man die Darstellungen $\frac{9}{11} = \frac{18}{22} = \frac{2 \cdot 22 + 1}{3 \cdot 18 + 1}$ mit $q = 6, r = 11, k = 5$ sowie $\frac{15}{41} = \frac{30}{82} = \frac{2 \cdot 82 + 1}{15 \cdot 30 + 1}$ mit $q = 2, r = 41, k = 11$.

Nach Satz 3 führt die erste zu einem bereits bekannten Beispiel ($g = 990$), die zweite zu einem neuen:

$$([30], [902])_{13530} = \left(\frac{[902]}{[30]} \right)_{13530} \quad \text{sowie} \quad ([82], [6765])_{13530} = \left(\frac{[6765]}{[82]} \right)_{13530}$$

(gemeinsame Werte: $30 \frac{1}{15}$ bzw. $82 \frac{1}{2}$).

Unser Ziel ist es aber, unendlich viele α, β zu finden, die (38') erfüllen. Dazu bietet sich an, möglichst schwache Teilbarkeitsbedingungen zu fordern, d.h. $\mu = 2$ und $\lambda = 3$ zu wählen.

Nach (41) folgt $k^2 - 1 = 6s^2$ mit ungeradem k , etwa $k = 2m - 1$, und daraus $2m(m - 1) = 3s^2$ mit geradem s ($s = 2\sigma$). Damit ist die erste Bedingung $\mu|\beta s$ bereits erfüllt. Wir erhalten

$$3\sigma^2 = \frac{1}{2}m(m - 1). \quad (43)$$

Aus (40) folgt $m = \frac{1}{2}(\alpha - 4\sigma + 1) = \gamma - 2\sigma$ mit $\alpha = 2\gamma - 1$ (wegen ungeradem k und $\mu = 2$), also

$$3\sigma^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 2\sigma)(\gamma - 2\sigma - 1). \quad (43')$$

Wir zeigen zunächst, dass m aus (43) bzw. γ aus (43') stets ungerade ist.

Angenommen, es sei $m = 2t$:

Im Fall $3|2t - 1$ existiert dann ein ungerades l ($l = 2l' - 1$) mit $2t - 1 = 3l$. Es folgt $t = 3l' - 1$ und $\sigma^2 = (3l' - 1)(2l' - 1)$ mit teilerfremden quadratischen Faktoren. Mit den Bezeichnungen $3l' - 1 = c^2$, $2l' - 1 = d^2$ folgt $2c^2 - 1 = 3d^2$ mit ungeradem d ($d = 2d' - 1$). Hieraus erhält man $c^2 = 2(3d'(d' - 1) + 1)$ mit ungeradem zweiten Faktor, was zum Widerspruch führt.

Im Fall $3|t$ ($t = 3l$) erhalten wir die Darstellung $\sigma^2 = l(6l - 1)$, wiederum mit teilerfremden quadratischen Faktoren (c^2, d^2). Es folgt $6c^2 - 1 = d^2$ mit ungeradem d ($d = 2d' - 1$) und hieraus $3c^2 = 2d'(d' - 1) + 1$, wobei aber $d'(d' - 1)$ nur die Reste 0 oder 2 mod 3 annehmen kann, was erneut zum Widerspruch führt.

m ist also ungerade. Mit $m = 2t + 1$ ergibt sich daher aus (43)

$$3\sigma^2 = (2t + 1)t \quad (44)$$

bzw. aus (43') mit $\gamma = 2\delta + 1$:

$$3\sigma^2 = (2\delta - 2\sigma + 1)(\delta - \sigma). \quad (44')$$

Die folgende Tabelle gibt die ersten acht Werte für t, m, σ an, die (44) bzw. (43) erfüllen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t_n	1	12	121	1200	11881	117612	1164241	11524800
m_n	3	25	243	2401	23763	235225	2328483	23049601
σ_n	1	10	99	980	9701	96030	950599	9409960

Tabelle 2

Es lassen sich folgende Vermutungen beweisen:

$$t_{n+1} - \sigma_{n+1} = t_n + \sigma_n; \quad m_{n+1} - 2\sigma_{n+1} = m_n + 2\sigma_n, \quad (45)$$

$$\sigma_{n+1} = 5\sigma_n + 4t_n + 1 = 5\sigma_n + 2m_n - 1, \quad (46)$$

$$t_{n+1} = 6\sigma_n + 5t_n + 1; \quad m_{n+1} = 12\sigma_n + 5m_n - 2, \quad (47)$$

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 10, \quad \sigma_{n+2} = 10\sigma_{n+1} - \sigma_n, \quad (48)$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 12, \quad t_{n+2} = 10t_{n+1} - t_n + 2; \\ m_1 = 3, \quad m_2 = 25, \quad m_{n+2} = 10m_{n+1} - m_n - 4, \quad (49)$$

$$\sigma_{2n} = 2(4t_n + 1)\sigma_n = 2(2m_n - 1)\sigma_n, \quad (50)$$

$$t_{2n} = 4(2t_n + 1)t_n; \quad m_{2n} = (2m_n - 1)^2. \quad (51)$$

Es lässt sich zeigen, dass damit die Lösungen von (43) bzw. (44) vollständig erfasst werden. Außerdem gilt nach (46) und (44)

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \frac{4t_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \sqrt{3} \cdot \frac{4t_{n+1}}{\sqrt{t_n(2t_n + 1)}} = 5 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{8 + \frac{1}{t_n(2t_n + 1)}}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \sqrt{24}$, so dass für σ_n – wie nach der Rekursionsformel (48) zu erwarten war – nach Berücksichtigung eines normierenden Faktors (vgl. $n = 1$) eine BINET-Formel entsteht:

$$\sigma_n = \frac{1}{2\sqrt{24}} \cdot \left((5 + \sqrt{24})^n - (5 - \sqrt{24})^n \right). \quad (52)$$

Wir kommen nun auf die zweite Teilbarkeitsbedingung $\lambda | \alpha s$ mit $\lambda = 3$, $\alpha = 2\gamma - 1 = 4\delta + 1$, $s = 2\sigma$ zurück. Sie ist genau dann erfüllt, wenn 3 Teiler von σ oder Teiler von $4\delta + 1$ ist.

Zum Fall $3 | \sigma$: Nach Tabelle 2 ist $\sigma_3 \equiv 0 \pmod{3}$, $\sigma_6 \equiv 0 \pmod{3}$, und allgemein führt $\sigma_{3n'} \equiv 0 \pmod{3}$ zu $\sigma_{3(n'+1)} \equiv 0 \pmod{3}$ wegen $\sigma_{3(n'+1)} \equiv \sigma_{3n'+2} - \sigma_{3n'+1} \equiv \sigma_{3n'+1} - \sigma_{3n'+1} - \sigma_{3n'} \equiv 0 \pmod{3}$ nach (48). Aus $\sigma_{3n'} \equiv 0 \pmod{3}$ folgt nach (48) andererseits $\sigma_{3n'-1} \equiv \sigma_{3n'-2} \pmod{3}$, wobei der Rest 0 nicht angenommen wird, weil sonst alle σ_n durch 3 teilbar wären im Widerspruch zu $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$. Es gilt also $3 | \sigma_n$ genau dann, wenn $3 | n$.

Zum Fall $3 | 4\delta + 1$: Aus (44) und (44') ergibt sich $\delta = \sigma + t$ und daher $4\delta + 1 = 4\sigma + 4t + 1$. Indiziert man die rechte Seite mit n , so gelangt man gemäß (46) und (48) zu den äquivalenten Bedingungen $3 | \sigma_{n+1} - \sigma_n$ und $3 | \sigma_{n+2}$.

Insgesamt ist – in indizierter Schreibweise – die zweite Teilbarkeitsbedingung $\lambda | \alpha_n s_n$ mit $\lambda = 3$ daher genau dann erfüllt, wenn $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ist. Dabei ist $k_n = 2m_n - 1 = 4t_n + 1$, also nach (50)

$$k_n = \frac{\sigma_{2n}}{2\sigma_n}, \quad (53)$$

und wegen $\mu = 2$, $s_n = 2\sigma_n$ gilt für α_n nach (40), (46): $\alpha_n = k_n + 4\sigma_n = 4t_n + 1 + 4\sigma_n$ bzw.

$$\alpha_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n. \quad (54)$$

Daraus folgt für β_n im Hinblick auf (39') wegen $\lambda - \mu = 1$:

$$\beta_n = \sigma_{n+1} + \sigma_n. \quad (55)$$

Die „quasi-reziproke“ Gleichung (38') ist daher für $s_n = 2\sigma_n$ und α_n, β_n aus (54) und (55) erfüllt, und für $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ sind die geforderten Teilbarkeitsbedingungen – trivial: $2 | (\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n$, nichttrivial: $3 | (\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n$ – garantiert:

$$\frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n}{(\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} = \frac{2(\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n + 1}{3(\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n + 1}, \quad (56)$$

wobei $\frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sigma_{n+1} + \sigma_n}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist, der mit $\frac{\sigma_{2n}}{2\sigma_n}$ zum Bruch auf der rechten Seite von (56) erweitert wird. Weiterhin gilt nach (37') $g_n = b_n(2b_n + 1)$ bzw. (u.a. nach (55))

$$g_n = (\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n \cdot (4(\sigma_{n+1} + \sigma_n)\sigma_n + 1) \quad (57)$$

mit $g_1 = 990 = 99 \cdot 10$, $g_2 = 9506980 = 9701 \cdot 980$, so dass man – vgl. Tabelle 2 – folgenden vereinfachten Ausdruck für g_n vermuten kann:

$$g_n = \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}. \quad (58)$$

Zum Nachweis greift man auf die Beziehungen (44), (46), (50) und (51) zurück und stellt fest, dass die rechten Seiten von (57) und (58) mit $5\sigma_{2n}^2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{4n}$ übereinstimmen.

Schließlich sind noch $a_n^2 + q_n$, $b_n^2 + r_n$ zu bestimmen:

$$a_n^2 + q_n = \frac{q_n}{a_n} \cdot g_n = \frac{1}{3}g_n = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}; \quad b_n^2 + r_n = \frac{r_n}{b_n} \cdot g_n = \frac{1}{2}g_n = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}.$$

Insgesamt gilt nach Satz 3:

Satz 4. *Es gibt unendlich viele g-adische Systeme mit 1/1-Darstellungen. Dazu gehören $g_n = \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}$, σ_n aus (52), $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, mit den Darstellungen*

$$\left((\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n, \frac{1}{3}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{3}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} \quad (59)$$

gemeinsamer Wert: $(\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n \frac{1}{3}$

$$\left((\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n, \frac{1}{2}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{2}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}{(\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} \quad (60)$$

gemeinsamer Wert: $(\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n \frac{1}{2}$.

Beispiele (zu (56) und Satz 4):

$$n = 1: \frac{9 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 1 + 1} \quad (k_1 = 5),$$

$$([18], [330])_{990} = \left(\frac{[330]}{[18]} \right)_{990} = 18 \frac{1}{3}; \quad ([22], [495])_{990} = \left(\frac{[495]}{[22]} \right)_{990} = 22 \frac{1}{2};$$

$$n = 3: \frac{881 \cdot 2 \cdot 99}{1079 \cdot 2 \cdot 99} = \frac{2 \cdot 1079 \cdot 2 \cdot 99 + 1}{3 \cdot 881 \cdot 2 \cdot 99 + 1} \quad (k_3 = 485),$$

$$([174438], [30428673990])_{91286021970} = \left(\frac{[30428673990]}{[174438]} \right)_{91286021970} = 174438 \frac{1}{3},$$

$$([213642], [45643010985])_{91286021970} = \left(\frac{[45643010985]}{[213642]} \right)_{91286021970} = 213642 \frac{1}{2};$$

$$n = 4: \frac{8721 \cdot 2 \cdot 980}{10681 \cdot 2 \cdot 980} = \frac{2 \cdot 10681 \cdot 2 \cdot 980 + 1}{3 \cdot 8721 \cdot 2 \cdot 980 + 1} \quad (k_4 = 4801).$$

Die Darstellungen gemäß Satz 4 sollen hier übergangen werden.

2.3.2 g -adische Systeme mit 1/2-Darstellungen⁴

Es gilt also unendlich viele g_n zu finden mit

$$g_n = \frac{a_n^3}{q_n} + a_n \quad (q_n < a_n, q_n | a_n^3) \quad \text{und} \quad g_n^2 = \frac{b_n^3}{r_n} + b_n \quad (r_n < b_n, r_n | b_n^3). \quad (61)$$

Hier führt die mit den Bedingungen konforme Spezialisierung $a_n = 2\alpha_n$, $q_n | 4\alpha_n^2$, $b_n = 4\alpha_n^2$, $r_n = 2\alpha_n^2$ zu

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{2} q_n (q_n - 1). \quad (62)$$

Die ersten Beispiele sind $1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1$, $6^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8$, $35^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 49$, $204^2 = \frac{1}{2} \cdot 289 \cdot 288$. Wegen $q_n < 2\alpha_n$ muss dabei aber nach (62) $q_n > 2$ sein. Da (q_n) streng monoton wächst, ist $n = 1$ ($q_1 = 2$) auszuschließen. Es lässt sich nun zeigen, dass es unendlich viele solcher quadratischer Werte von arithmetischen Reihen gibt: Es gilt die Rekursionsformel $\alpha_{n+2} = 6\alpha_{n+1} - \alpha_n$ und

$$\alpha_n = \frac{1}{2\sqrt{8}} \cdot \left((3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n \right), \quad q_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{8\alpha_n^2 + 1} + 1 \right) \quad (n > 1). \quad (63)$$

Wegen $g_n = 2\alpha_n(2q_n - 1) = \alpha_{2n}$ erhält man schließlich

Satz 5. *Es gibt unendlich viele g -adische Systeme mit 1/2-Darstellungen. Dazu gehören $g_n = \alpha_{2n}$, α_n aus (62) bzw. (63), $n > 1$, mit den Darstellungen*

$$(2\alpha_n, q_n(2q_n - 1))_{\alpha_{2n}} = \left(\frac{q_n(2q_n - 1)}{2\alpha_n} \right)_{\alpha_{2n}} \quad (1 \text{ Nachkommastelle}), \quad (64)$$

$$\left(4\alpha_n^2, \left[\frac{\alpha_{2n}}{2} \right] [0] \right)_{\alpha_{2n}} = \left(\frac{\left[\frac{\alpha_{2n}}{2} \right] [0]}{4\alpha_n^2} \right)_{\alpha_{2n}} \quad (2 \text{ Nachkommastellen}). \quad (65)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} n = 2: & ([12], [153])_{204} = \left(\frac{[153]}{[12]} \right)_{204} \quad (\text{gemeinsamer Wert: } 12\frac{3}{4}), \\ & ([144], [102][0])_{204} = \left(\frac{[102][0]}{[144]} \right)_{204} \quad (\text{gemeinsamer Wert: } 144\frac{1}{2}); \\ n = 3: & ([70], [4950])_{6930} = \left(\frac{[4950]}{[70]} \right)_{6930} \quad (\text{gemeinsamer Wert: } 70\frac{5}{7}), \\ & ([4900], [3465][0])_{6930} = \left(\frac{[3465][0]}{[4900]} \right)_{6930} \quad (\text{gemeinsamer Wert: } 4900\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

⁴In diesem Abschnitt wird aus Platzgründen auf die Beweise verzichtet. Die Methoden ähneln denen in 2.3.1.

Bemerkung: Es lassen sich auch Einzelbeispiele mit 1/2-Darstellungen konstruieren, bei denen die zweite Nachkommastelle „besetzt“ ist, z.B.

$$\begin{aligned} ([6214], [38614134])_{709906002} &= \left(\frac{[38614134]}{[6214]} \right)_{709906002} \left(\text{gemeinsamer Wert: } 6214 \frac{13}{239} \right), \\ ([38613796], [2100313][436865232])_{709906002} &= \left(\frac{[2100313][436865232]}{[38613796]} \right)_{709906002} \\ &\left(\text{gemeinsamer Wert: } 38613796 \frac{1}{338} \right). \end{aligned}$$

Ein Nachweis dafür, dass unendlich viele 1/2-Darstellungen mit „besetzten“ zweiten Nachkommastellen existieren, konnte nicht geführt werden.

3 Weitere Fragen

zu **Satz 3:**

Gibt es M/N -Darstellungen mit (o.B.d.A.) $M \leq N$ sowie $(M, N) \neq (1, 1), (1, 2)$?

Gibt es insbesondere 2/2-Darstellungen und solche, die sich auf mehr als 2 Nachkommastellen ($n \geq 2$) beziehen?

Gibt es ein praktikables Kriterium, das im Fall $g = \frac{a^3}{q} + a$ ($1 \leq q < a, q|a^3$) weitere Darstellungen ausschließt? (Vgl. die Ausführungen zu $g = 10$ in **1.**)

zu **2.3.1:**

Lassen sich aus (37) mit $q \nmid a \vee r \nmid b$ unendlich viele g mit 1/1-Darstellungen konstruieren? (Vgl. die Beispiele 520 und 5460 in Tabelle 1.)

Schreibt man (39) in der Form $(\beta - \alpha)h = (\lambda - \mu)s$ und vermeidet die Spezialisierung $h = 1$ (39'), so erhält man

$$k + \lambda s = \beta h, \quad k + \mu s = \alpha h, \quad k^2 - h = \mu \lambda s^2, \quad \mu s = \frac{\alpha^2 h - 1}{\alpha + \beta}, \quad \lambda s = \frac{\beta^2 h - 1}{\alpha + \beta}.$$

Erreicht man auf diese Weise mithilfe der Variablen h einen größeren „Gestaltungsspielraum“, um unendlich viele g mit 1/1-Darstellungen konstruieren zu können?

zu **Satz 5:**

Gibt es unendlich viele g -adische Systeme mit 1/2-Darstellungen und „besetzten“ zweiten Nachkommastellen?

Stefan Deschauer
Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik
D-01062 Dresden, Deutschland
e-mail: Stefan.Deschauer@tu-dresden.de