Elem. Math. 63 (2008) 145 – 149
0013-6018/08/030145-5

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2009 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Momentan herrscht ein gewisser Mangel an neuen Aufgaben. Aufgabenvorschläge können ebenfalls über die obige Adresse eingesandt werden.

Aufgabe 1257: k Kugeln werden unabhängig und zufällig in n Behälter gelegt. Die Zufallsvariable X zähle die nichtleeren Behälter. Bestimme den Erwartungswert $E(X)$ und die spektrale Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x)$ von X ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \{0, 1, \dots, n\}$).

Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Aufgabe 1258: Gegeben seien die drei Summen

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-1-3k}{n-1},\\
s_2 &= \sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k},\\
s_3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^n\sum_{k\ge 0}3^{-k}\binom{2k}{k}\binom{k}{n-k}.
\end{aligned}$$

Beweise, dass $s_1 = s_2 = s_3$ ($n \ge 1$).

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1259 (Die einfache dritte Aufgabe): Bestimme alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Gleichung

$$x^3 - y^3 = xy + 503.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BA

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2007

Aufgabe 1245. Beweise, dass für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und positive Zahlen x, y, z mit $x+y+z = 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$(xy)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} + (yz)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} + (zx)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Gheorghe Bercea (München, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hongkong, CN), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Wir folgen *Gheorge Bercea*, der mit elementaren Mitteln auskommt: Die Ungleichung (1) zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel und die Ungleichung (2) von Bernoulli

$$(xy)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{x+y}{2} \Longleftrightarrow (xy)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{1}$$

$$(1+t)^r \leq 1 + rt \quad (0 < r \leq 1,\ t \geq -1) \tag{2}$$

liefern

$$\begin{aligned} (xy)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{2}{n}} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{2}{n}} = \left(1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq 1 + \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{z}{n} < 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$(xy)^{1+\frac{1}{n}} = (xy)\,(xy)^{\frac{1}{n}} < xy\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{3}$$

$$(yz)^{1+\frac{1}{n}} = (yz)\,(yz)^{\frac{1}{n}} < yz\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

$$(zx)^{1+\frac{1}{n}} = (zx)\,(zx)^{\frac{1}{n}} < zx\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Durch Addieren der drei Ungleichungen (3), (4) und (5) erhält man

$$(xy)^{1+\frac{1}{n}} + (yz)^{1+\frac{1}{n}} + (zx)^{1+\frac{1}{n}} < (xy + yz + zx)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Zur Vervollständigung des Beweises bedarf es noch des Nachweises, dass

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}.$$

Dies wird aber aus

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{(x+y+z)^2}{3} - \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{6} \\ &\leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

sofort klar.

Aufgabe 1246. Welches ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, dass, wenn man die letzte Ziffer an den Anfang transferiert, die neue Zahl ein echtes Vielfaches der ursprünglichen ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 20 Lösungen eingegangen, nämlich von Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Panagiotis Cheilaris (Athen, GR), Hans Egli (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Ignace Morand (Préverenges, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Walter Burgherr erinnert sich an einen Artikel aus unserer Zeitschrift [1], in welchem gezeigt wird, dass Vielfache der Zahl 142857 durch zyklisches Vertauschen der Ziffern hervorgehen. Wegen $714285 = 5 \cdot 142857$ genügt es, nach kleineren Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft zu fahnden.

Die gesuchte n–stellige Zahl z setze sich aus a Zehnern und b Einern zusammen, wobei aus der Aufgabenstellung sofort $b \neq 1$ folgt:

$$z = 10a + b, \qquad 2 \leq b \leq 9, \qquad 10^{n-2} \leq a < 10^{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Die Zahl $z \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} 10^{-n\cdot\ell} = \frac{z}{10^n - 1}$ ist ein reinperiodischer Dezimalbruch mit Periodenlänge n und somit auch als gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ darstellbar:

$$\frac{z}{10^n - 1} = \frac{p}{q}.$$

Aus

$$z = 10a + b = \frac{(10^n - 1)p}{q}$$

und

$$k \cdot z = a + 10^{n-1}b = \frac{(10^n - 1)kp}{q}, \qquad k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

findet man

$$b = \frac{(10k - 1)p}{q}.$$

Der Nenner q muss also sowohl Teiler von $10k - 1$ als auch von $10^n - 1$ sein. Mit den Faktorzerlegungen

$$\begin{aligned} 99 &= 3^2 \cdot 11 \\ 999 &= 3^3 \cdot 37 \\ 9999 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 101 \\ 99999 &= 3^2 \cdot 41 \cdot 271 \\ 999999 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \end{aligned}$$

und $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89$ als Möglichkeiten für $10k - 1$ kommen für $n \leq 6$ nur $3, 7, 13$ und 39 als Werte für q in Frage, wobei 3 wegen der einstelligen Periode sofort wieder entfällt.

Tatsächlich findet man

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{7} \cdot 999999 = 142857, & \frac{5}{7} \cdot 999999 = 714285, & (k, n, p, q) = (5, 6, 1, 7) \\ \frac{2}{13} \cdot 999999 = 153864, & \frac{8}{13} \cdot 999999 = 415386, & (k, n, p, q) = (4, 6, 2, 13) \\ \frac{3}{13} \cdot 999999 = 230769, & \frac{12}{13} \cdot 999999 = 923076, & (k, n, p, q) = (4, 6, 3, 13) \\ \frac{4}{39} \cdot 999999 = \underline{102564}, & \frac{16}{39} \cdot 999999 = 410256, & (k, n, p, q) = (4, 6, 4, 39) \\ \frac{5}{39} \cdot 999999 = 128205, & \frac{20}{39} \cdot 999999 = 512820, & (k, n, p, q) = (4, 6, 5, 39) \\ \frac{7}{39} \cdot 999999 = 179487, & \frac{28}{39} \cdot 999999 = 717948, & (k, n, p, q) = (4, 6, 7, 39) \end{array}$$

Die kleinste einschlägige Zahl ist also 102564.

[1] Koch, H.: Periodische Positionsbrüche und elementare Zahlentheorie. *Elem. Math.* 60 (2005), 1–9.

Aufgabe 1247 (Die einfache dritte Aufgabe). In seinen „52 Wanderungen“ beschreibt Franz Hohler einen Rundgang um den Pfäffikersee und wie er dabei verschiedenen anderen Rundgängern ein zweites Mal begegnet. Für diese Aufgabe treffen wir die folgenden vereinfachenden Annahmen: Wanderer kommen zu „zufälligen“ (gemeint ist: gleichverteilten) Zeiten an „zufälligen“ Orten an den See, gehen einmal herum und verschwinden dann wieder. Jeder Rundgänger hat seine eigene konstante Geschwindigkeit. Zeige: Höchstens 25% der Leute, die Franz Hohler auf seinem Rundgang kreuzt, kreuzt er in diesem Moment zum zweiten Mal.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 5 Lösern eingetroffen: Hans Egli (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Wir folgen *Hans Egli*: Die Umrundungszeit von Franz Hohler sei t, die Umrundungszeit eines Entgegenkommenden sei $x \cdot t$. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kreuzungen beträgt dann $\tau = \frac{x}{1+x} \cdot t$. Damit eine Kreuzung eine zweite Kreuzung sein kann, müssen beide Wanderer bei der Kreuzung mindestens die Zeit τ unterwegs gewesen sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$P(x) = \frac{t-\tau}{t} \cdot \frac{xt-\tau}{xt} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Das Maximum der Funktion P im Intervall $(0, \infty)$ wird für $x = 1$ erreicht und hat den Wert $\frac{1}{4}$, womit alles klar ist.