

---

---

## ***B*-adische Teilbarkeitstests im Vergleich**

---

---

Alfred Schreiber

Alfred Schreiber hat Mathematik, Physik und Philosophie in Gießen und Köln studiert. Er promovierte 1975 an der Universität zu Köln und habilitierte sich 1981 an der RWTH Aachen auf dem Gebiet „Didaktik der Mathematik“. Seit 1986 ist er Professor am Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg. Seine Arbeits- und Interessensgebiete umfassen Elementarmathematik, Heuristik und Wissenschaftslogik sowie Mathematik in Geschichte, Kultur und Gesellschaft.

Teilbarkeitstests in Stellenwertsystemen liefern Aussagen über die kleinen Teiler einer natürlichen Zahl  $a$ , gestützt auf die Ziffern von  $a$ . In der Zahlentheorie sind solche Kriterien eher ein Thema am Rande; hingegen spielen sie traditionell eine gewisse Rolle in der elementaren Arithmetik, vor allem als Hintergrund für die Behandlung von Teilbarkeitsfragen im Mathematikunterricht; typische Beispiele dafür sind [1] und [3].

Im Folgenden geht es darum,  $B$ -adische Teilbarkeitstests in einer einheitlichen und sinnfälligen Form darzustellen. Davon ausgehend werden die zu Testteilern und Stellenwertbasen verfügbaren Teilbarkeitstests (genauer: Testmengen) berechnet und nach bestimmten Gütekriterien bewertet.

Dient die ganze Zahl  $B \geq 2$  als Basis des Stellenwertsystems und sind  $c_0, c_1, \dots, c_n$ ,  $c_n \neq 0$ , die (nach steigender Wertigkeit geordneten)  $B$ -adischen Ziffern von  $a$ , so wird wie üblich geschrieben:

$$a = (c_n \dots c_1 c_0)_B := \sum_{j=0}^n c_j B^j. \quad (1)$$

Teilbarkeitstests in Stellenwertsystemen sind ein klassisches Thema der elementaren Arithmetik im Mathematikunterricht. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der Testbegriff abgegrenzt und durch ein allgemeines Reduktionslemma unterlegt. Dann werden sämtliche Tests bis zur dritten Ordnung zu Stellenwertbasen bis 16 und zu Testteilern bis 99 systematisch aufgestellt und vergleichend bewertet. Es ergibt sich eine Rangtabelle von 17 Testteilern mit mehr als fünf Tests. Als mit Abstand höchstbewertete Stellenwertbasis erweist sich 11 (gefolgt von 13 und 9). In der betrachteten Testmenge spielen Quersummentests, mit einem Bewertungsanteil von über 72%, eine vorherrschende Rolle.

Um zu prüfen, ob  $a$  durch einen Testteiler  $d$  teilbar ist, sucht man eine einfachere zu testende (im allgemeinen kleinere) Zahl  $a'$ , die zu  $a$  kongruent ist:  $a \equiv a' \pmod{d}$ . In einer Stellenwertdarstellung liegt es nahe, zunächst die Potenzen der Basis zu reduzieren:

$$B^j \equiv r_j \pmod{d}.$$

Mit (1) ergibt sich daraus

$$a \equiv a' := \sum_{j=0}^n c_j r_j \pmod{d}.$$

Die hier rechterhand auftretende „verallgemeinerte Quersumme“ (vgl. [2]) ist im Prinzip der Schlüssel für die  $B$ -adischen Teilbarkeitsregeln. Deutlich ist dies aber erst zu erkennen, wenn man der Summe  $a'$  von vornherein die charakteristische Form einer Quersumme höherer Ordnung gibt. Für eine Quersumme der Ordnung  $s \geq 1$  werden in der  $B$ -adischen Darstellung  $c_n \dots c_1 c_0$  rechts bei den Einern  $c_0$  beginnend Blöcke von jeweils  $s$  Ziffern abgegriffen. Wo dies am linken Ende nicht glatt aufgeht, denken wir uns eine passende Anzahl führender Nullen  $c_k = 0$  ( $k > n$ ) vorgeschaltet. Es gilt dann das folgende allgemeine *Reduktionslemma*:

**Proposition 1** *Besteht zu gegebenen ganzen Zahlen  $B \geq 2$  (Basis),  $s \geq 1$  und  $d \geq 2$  die Kongruenz  $B^s \equiv \rho \pmod{d}$  für ein  $\rho \in \mathbb{Z}$ , so gilt für jede natürliche Zahl  $a$  mit der  $B$ -adischen Darstellung  $a = (c_n \dots c_1 c_0)_B$*

$$a \equiv \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} (c_{(j+1)s-1} \dots c_{js})_B \cdot \rho^j \pmod{d}. \quad (2)$$

*Beweis.* Wir gruppieren in der  $B$ -adischen Darstellung  $a = (c_0 + c_1 B + \dots + c_{s-1} B^{s-1}) + \dots + c_n B^n$  bei  $c_0$  beginnend je  $s$  Summanden in einer Klammer. Im Falle  $j > 0$  steht in der  $j$ -ten Klammer der Term  $c_{(j+1)s-1} B^{(j+1)s-1} + \dots + c_{js} B^{js}$ . Wir ziehen den Faktor  $B^{js}$  heraus und erhalten:

$$a \equiv (c_{s-1} \dots c_0)_B + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} (c_{(j+1)s-1} \dots c_{js})_B \cdot B^{js} \pmod{d}.$$

Unter Beachtung von  $B^{js} = (B^s)^j \equiv \rho^j \pmod{d}$  liefert dies (mit der Vereinbarung  $\rho^0 = 1$  auch für den Fall  $\rho = 0$ ) die behauptete Kongruenz (2).  $\square$

Aus (2) wird sofort ersichtlich, dass eine wirksame Reduktion nur bei  $\rho \in \{0, -1, 1\}$  zustande kommt. In diesem Fall wollen wir  $\rho$  einen *Reduktionsrest* nennen (wobei  $-1$  für den Rest  $d - 1$  steht). Für  $\rho = 0$  liefert (2) unmittelbar einen Endstellentest bezüglich der letzten  $s$  Ziffern von  $a$ ; für  $\rho = 1$  und  $\rho = -1$  ergeben sich Teilbarkeitskriterien über Quersummen bzw. alternierende Quersummen, die mit Ziffernblöcken der Länge  $s$  gebildet werden.

**Beispiele** (zur Basis  $B = 10$ )

- (1) Für  $d = 4, 10, 20, 25, 50$  liefert das Reduktionslemma mit  $10^2 \equiv 0 \pmod{d}$  den Endstellentest  $a \equiv (c_1c_0)_{10} \pmod{d}$ .
- (2) Für  $d = 11$  gewinnt man aus  $10 \equiv -1 \pmod{d}$  die geläufige alternierende Quersummenregel  $a \equiv (-1)^n c_n + \dots - c_1 + c_0 \pmod{d}$  sowie aus  $10^2 \equiv 1 \pmod{d}$  einen Quersummentest zweiter Ordnung:  $a \equiv (c_1c_0)_{10} + (c_3c_2)_{10} + (c_5c_4)_{10} + \dots \pmod{d}$  (z.B. ist 1071675 durch 11 teilbar, weil  $75 + 16 + 7 + 1 = 99$  durch 11 teilbar ist).
- (3) Der Testteiler  $d = 7$  führt auf eine kaum praktikable Quersumme 6-ter Ordnung ( $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ), daneben aber auch auf eine alternierende Quersumme dritter Ordnung (wegen  $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ ). Obwohl diese brauchbarer erscheint, ist ihr Reduktionseffekt immer noch spürbar abgeschwächt: 164471104 ist durch 7 teilbar, sofern  $104 - 471 + 164 = -203 = 7 \cdot (-29)$ . Bemerkenswerterweise genügt aber auch für  $d = 37$  eine Quersumme dritter Ordnung ( $10^3 \equiv 1 \pmod{d}$ ).

Betrachten wir nun allgemein zu gegebenem Testteiler  $d$  in einem Stellenwertsystem mit der Basis  $B \geq 2$  die Kongruenz

$$B^s \equiv \rho \pmod{d}. \quad (3)$$

Ein Quadrupel  $(B, d, \rho, s)$ , welches (3) genügt, heiße per Definition ein *Teilbarkeitstest* (oder kurz: *Test*) für den Testteiler  $d$  im Stellenwertsystem zur Basis  $B$ , wenn  $\rho$  ein Reduktionsrest ( $|\rho| \leq 1$ ) und  $s \geq 1$  minimal gewählt ist; in dem Fall wird  $s$  *Ordnung* des Tests genannt. Ist  $\mathcal{B}$  eine Menge von Basen,  $\mathcal{D}$  eine Menge von Testteilern und  $m \geq 1$  eine ganze Zahl, so bezeichne

$$\text{Test}_m(\mathcal{B}, \mathcal{D})$$

die Menge aller Teilbarkeitstests  $(B, d, \rho, s)$  mit  $B \in \mathcal{B}$ ,  $d \in \mathcal{D}$  und  $s \leq m$ . Bequemlichkeitshalber mögen einelementige Basen- und Testteilmengen ohne Mengenklammern notiert werden, also etwa  $\text{Test}_3(10, \{2, \dots, 99\})$  für die Menge aller Tests höchstens dritter Ordnung, die es im Dezimalsystem für ein- und zweistellige Testteiler gibt.

**Bemerkungen**

(1) Die effektive Berechnung von Testmengen ist im Prinzip simpel, jedoch langwierig genug, um sie mittels Computeralgebra zu erledigen (vgl. [4]). Als Kernroutine benötigt man dafür eine Funktion, die zu gegebenem Paar  $(B, d)$  und  $m \geq 1$  die Testmenge  $\text{Test}_m(B, d)$  berechnet, am einfachsten durch Potenzieren von  $\overline{B}$  im Restklassenring  $\mathbb{Z}_d$ . So früh wie möglich sind die dabei auftretenden Werte zu reduzieren. Definiert man etwa (in der Sprache von *Mathematica*) das Produkt  $ux \pmod{d}$  durch die Funktion `MultMod[d_, u_] [x_] := Mod[Mod[u, d] * Mod[x, d], d]`, so liefert `Drop[NestWhileList[MultMod[d, B], Mod[B, d], UnsameQ, All], -1]` genau die hier interessierende Liste der verschiedenen Potenzen  $B^j \pmod{d}$ .

(2) Zahlentheoretische Hilfsmittel sind zur Ermittlung von Testmengen eigentlich nicht erforderlich und auch nicht sonderlich wirksam. Dennoch mag es lehrreich sein, einige

Aspekte einmal kurz zu beleuchten. – Sind  $B, d$  teilerfremd, so liefert der Satz von Euler-Fermat,  $B^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$ , sofort einen Quersummentest, dessen Ordnung  $\phi(d)$  teilt. Für einen primen Testteiler  $d \geq 3$  gilt nach dem Euler-Legendre-Kriterium:

$$B^{\frac{d-1}{2}} \equiv \left(\frac{B}{d}\right) \pmod{d}.$$

Wenn daher  $B$  quadratischer Nichtrest modulo  $d$  ist, nimmt das Legendre-Symbol den Wert  $-1$  an und wir erhalten zusätzlich einen alternierenden Quersummentest einer Ordnung  $\leq (d-1)/2$ .

Sind hingegen  $B, d$  nicht teilerfremd, so können die Reduktionsreste  $\rho = \pm 1$  gar nicht erst auftreten. Die Restklasse  $\overline{B}$  und ihre Potenzen sind dann sämtlich Nullteiler in  $\mathbb{Z}_d$ . Für einen Endstellentest muss  $\overline{B}$  jedoch darüber hinaus nilpotent in  $\mathbb{Z}_d$  sein. Dies ist nicht dasselbe wie die Nullteilereigenschaft: z. B. ist  $\overline{10}(= \overline{4})$  Nullteiler in  $\mathbb{Z}_6$ , während für alle  $j \geq 1$  gilt:  $10^j \equiv 4 \pmod{6}$ . Allgemein gilt: Eine Restklasse  $\overline{a}$  ist nilpotent in  $\mathbb{Z}_d$  genau dann, wenn jeder Primteiler von  $d$  auch Teiler von  $a$  ist. Einem Beweis (hier als Übungsaufgabe) lässt sich bei näherer Betrachtung ein expliziter Ausdruck für das kleinste  $s \geq 1$  mit  $a^s \equiv 0 \pmod{d}$  entnehmen, der nur von  $a$  sowie von den Primteilern und ihren Vielfachheiten in der Primfaktorzerlegung von  $d = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$  abhängt. Er gibt die Ordnung des zugehörigen Endstellentests an und lautet:

$$s = \max_{1 \leq i \leq r} \left\lceil k_i \frac{\log p_i}{\log \text{GGT}(a, p_i^{k_i})} \right\rceil.$$

Dabei bezeichnet  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $x$ .

### Bewertungsfragen

Denkt man hier an den ursprünglichen Zweck eines ziffernbezogenen Teilbarkeitstests, die schnelle händische Überprüfung einer vorliegenden ganzen Zahl, so erscheint es sinnvoll, sich auf kleine Bezugsmengen von gebräuchlichen Stellenwertbasen und (dezimal noch zweistelligen) Testteilern zu beschränken. Wir legen daher fest:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \{2, 3, \dots, 16\}, \\ \mathcal{D} &:= \{d \in \mathbb{N} \mid 2 \leq d < 100\}. \end{aligned}$$

Ferner sollen ausschließlich Tests höchstens dritter Ordnung als *brauchbar* in Betracht gezogen werden. Eine solche Grenzziehung ist rein pragmatisch (und nie ganz ohne Willkür), doch vor allem soll ein Test ja die ihm innewohnende Divisionsaufgabe erleichtern, was bei Ordnungen  $> 3$  fraglich ist (obgleich eine alternierende Quersumme gelegentlich ein einstelliges Ergebnis hervorbringen kann).

Die hier vorgeschlagene Bewertung eines Tests  $(B, d, \rho, s) \in \text{Test}_3(\mathcal{B}, \mathcal{D})$  orientiert sich ausschließlich an seiner Ordnung. Wir definieren dazu die Funktionen  $g_1(s) := 1$  und  $g_2(s) := \frac{1}{s}$  für  $s \in \{1, 2, 3\}$ . Die Bewertung einer Testmenge mittels  $g_1$  bestimmt demzufolge ihre Anzahl, mittels  $g_2$  hingegen eine Summe, in der ein Test umgekehrt proportional zu seiner Ordnung gewichtet wird. Basen-Teiler-Paare werden dann durch die Funktionen

$$f_i(B, d) := \sum_{(B, d, \rho, s) \in \text{Test}_3(\mathcal{B}, \mathcal{D})} g_i(s)$$

( $i = 1, 2$ ) bewertet; in beiden Argumenten lassen wir auch Mengen (von Basen oder Teilern) zu, über welche dann jeweils die Einzelwerte  $f_i(B, d)$  zu summieren sind.

**Bemerkung**

Der hier als *terminus technicus* eingeführte Begriff „Teilbarkeitstest“ und auch der speziellere Begriff des „brauchbaren“ Tests umfassen offensichtlich nicht alle in der Praxis gebräuchlichen und sinnvollen Prüfmöglichkeiten, z. B. das Kombinieren mehrerer Tests (Teilbarkeit durch 6 aus der Teilbarkeit durch 2 und 3) oder das Reduzieren durch iterierte Quersummenbildung (etwa für die Testteiler 9 und 11). Andererseits würde die systematische Test-Bewertung, auf die unsere Definition zugeschnitten ist, um einiges verwickelter, wollte man solche abgeleiteten Tests mit berücksichtigen; auch wäre die Abgrenzung „brauchbarer“ Tests in plausibler Weise auf dieses erweiterte Feld auszudehnen.

Es folgt nun eine Bewertung von Testteilern und Stellenwertbasen, wobei die dabei gemachten Aussagen sich auf Berechnungen gründen, die explizit in [4] durchgeführt sind; dort findet man auch einen Überblick über sämtliche 327 Elemente von  $\text{Test}_3(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ .

**Bewertung von Testteilern**

Zunächst eine Aussage zu den Testteilern im Dezimalsystem:

**Proposition 2** *Im Dezimalsystem gibt es  $f_1(10, \mathcal{D}) = 21$  brauchbare Tests für höchstens zweistellige Teiler. Diese sind genau die Zahlen 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 20, 25, 27, 33, 37, 40, 50, 77, 91, 99. Der Teiler 11 hat (als einziger) zwei Tests. Es gibt 78 Teiler ohne brauchbaren Test; die fünf kleinsten von ihnen sind 6, 12, 14, 15, 16.*

Zieht man alle Basen aus  $\mathcal{B}$  in Betracht, so gibt es immerhin noch 26 Teiler ohne einen brauchbaren Test; die fünf kleinsten von ihnen lauten: 22, 23, 44, 46, 47. Interessanter ist die umgekehrte Frage nach den Teilern mit der größten Testanzahl. Eine Antwort gibt die

**Proposition 3** *Es gilt  $f_1(\mathcal{B}, d) > 5$  für genau 17 Testteiler  $d$ . Diese belegen die ersten zehn Rangplätze wie folgt:*

|                |    |    |    |    |        |    |    |               |                |                |
|----------------|----|----|----|----|--------|----|----|---------------|----------------|----------------|
| Rang           | 1  | 2  | 3  | 4  | 5      | 6  | 7  | 8             | 9              | 10             |
| Testanzahl     | 22 | 20 | 19 | 18 | 17     | 16 | 11 | 8             | 7              | 6              |
| Testteiler $d$ | 2  | 3  | 4  | 5  | 7<br>8 | 9  | 13 | 6<br>14<br>16 | 10<br>12<br>27 | 15<br>18<br>24 |

Abb. 1 stellt die Testanzahlen im Histogramm dar.

Den hier aufgelisteten 17 ergiebigsten Testteilern entsprechen insgesamt 203 Tests, das sind etwa 62% der Menge  $\text{Test}_3(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ ; in Bezug auf die Bewertung (mittels  $g_2$ ) liegt ihr Anteil sogar etwas über 72% von  $f_2(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \frac{587}{3}$ .

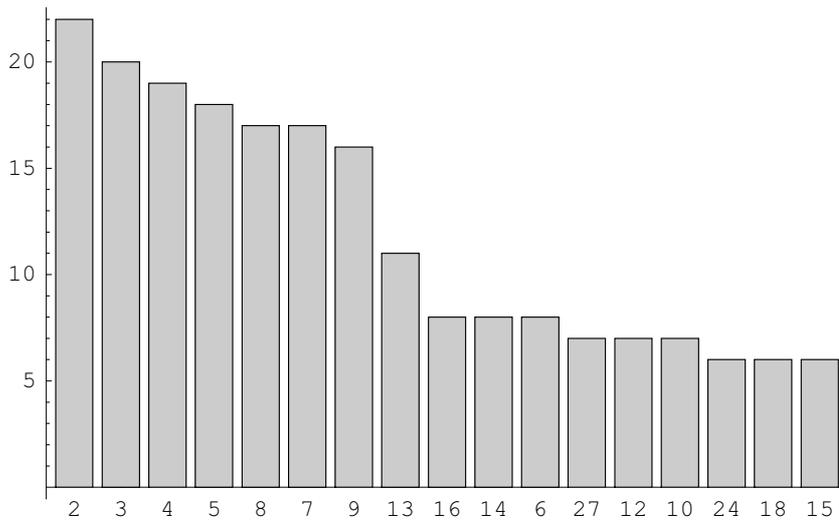


Abb. 1 Testanzahlen zu Testteilern

### Bewertung der Stellenbasen

Kommen wir nun zu der Frage, welche Stellenwertbasis die meisten bzw. höchstbewerten Teilbarkeitstests ermöglicht; sie ist eher von grundsätzlichem Interesse und befriedigt natürlich nur die theoretische Neugierde und keinerlei realen praktischen Bedarf. Selbst bei ungünstigem Abschneiden des Dezimalsystems ist der Zweck solcher Tests zu marginal, um eine in vieler Hinsicht unpraktikable Umstellung auf ein anderes Stellenwertsystem zu rechtfertigen.

In vergleichenden Betrachtungen liegt gelegentlich ein besonderes Augenmerk auf Endstellentests. In [3] gelten sie als Vorzug der Basen 6 und 10 (wobei allerdings nur die Testteiler 2 bis 10 in Betracht kommen), während sie nach [1] vor allem die Basis 12 als vorteilhaft erscheinen lassen. Diese Einschätzung berücksichtigt zu wenig, dass mit einem Endstellentest höherer Ordnung immer noch eine Divisionsaufgabe verbunden bleibt, deren Lösung u.U. nicht auf der Hand liegt. Die in [1] gemachte Aussage, wonach „die Wahl der Basiszahl 10 nicht die günstigste“ ist, trifft zwar zu, muss jedoch auf eine breitere Vergleichsgrundlage gestellt werden. Dabei zeigt sich, dass die Basis 10 noch schlechter abschneidet als vielleicht befürchtet, andererseits aber auch, dass die Basis 12 bei keinem Bewertungsverfahren auf den ersten drei Rangplätzen erscheint.

**Proposition 4** Die Funktionen  $B \mapsto f_i(B, \mathcal{D})$  ( $i = 1, 2$ ) nehmen auf  $\mathcal{B}$  ihr Maximum bei  $B = 11$  an, die nächstkleineren Werte bei  $B = 13$  und  $B = 9$ .

Am unteren Ende der Rangfolge finden sich die Basen 10, 8, 6, 4, 3, 2; in der  $f_2$ -Bewertung rangiert 8 noch vor 10. In der folgenden Tabelle wurden diese unterdurchschnittlichen Basen (mit Ausnahme von 10) weggelassen. Zusätzlich zu den Wertverläufen

von  $f_1$  (Anzahl) und  $f_2$  (Bewertung, auf eine Nachkommastelle gerundet) sind die jeweils am häufigsten auftretenden Testtypen gemäß dem Reduktionsrest  $\rho$  angegeben (E für  $\rho = 0$ , A für  $\rho = -1$ , Q für  $\rho = 1$ ).

|                       |    |      |    |      |    |      |      |      |      |      |
|-----------------------|----|------|----|------|----|------|------|------|------|------|
| Basis $B$             | 5  | 7    | 9  | 10   | 11 | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
| $f_1(B, \mathcal{D})$ | 23 | 25   | 27 | 21   | 33 | 26   | 27   | 21   | 21   | 23   |
| $f_2(B, \mathcal{D})$ | 13 | 14,8 | 16 | 12,2 | 19 | 15,2 | 17,3 | 13,2 | 15,3 | 13,8 |
| Testtyp               | A  | Q    | Q  | E    | Q  | E    | Q    | E    | Q    | Q    |

Abb. 2 zeigt die Rangfolge aller Basen bez. der  $f_2$ -Bewertung; die mittlere Bewertung pro Basis (13,0444) ist als Gerade eingezeichnet.

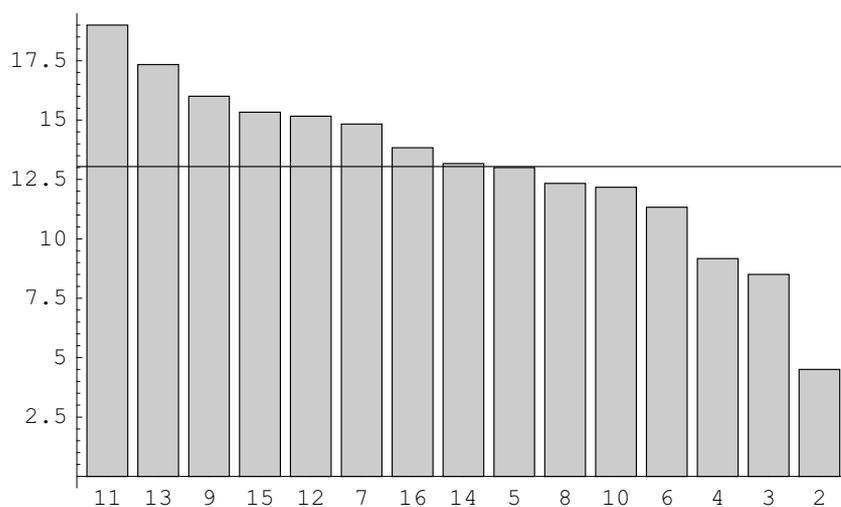


Abb. 2 Rangfolge von Stellenwertbasen

Die Bewertung der ergiebigsten Stellenbasen lässt vermuten, dass Quersummentests eine vorherrschende Rolle spielen. Dies wird bestätigt, wenn man die Verteilung der neun möglichen Testtypen in der Menge  $\text{Test}_3(\mathcal{B}, \mathcal{D})$  betrachtet:

| Typ      | Ord. 1 | Ord. 2 | Ord. 3 | $\Sigma$   |
|----------|--------|--------|--------|------------|
| E        | 34     | 38     | 19     | 91         |
| A        | 34     | 24     | 35     | 93         |
| Q        | 30     | 66     | 47     | 143        |
| $\Sigma$ | 98     | 128    | 101    | <b>327</b> |

**Literatur**

- [1] Gorski, H.-J.; Müller-Philipp, S.: *Leitfaden Arithmetik*. 2. Aufl. Vieweg-Verlag, Wiesbaden 2004.
- [2] Ostmann, H.-H.; Liermann, H.: Zahlentheorie. In: Behnke et al. (Hrsg.): *Grundzüge der Mathematik*. Bd. I Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1966.
- [3] Padberg, F.: *Elementare Zahlentheorie*. 2. Aufl. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1991.
- [4] Schreiber, A.: [www.gefilde.de/ashome/software/software.html](http://www.gefilde.de/ashome/software/software.html) (Notebook `ttest.nb`: kommentierte Sammlung von *Mathematica*-Funktionen zur Berechnung und Bewertung von Teilbarkeits-tests), Februar 2007.

Alfred Schreiber  
Universität Flensburg  
Institut für Mathematik und ihre Didaktik  
Auf dem Campus 1  
D-24943 Flensburg  
e-mail: [alfred.schreiber@uni-flensburg.de](mailto:alfred.schreiber@uni-flensburg.de)