

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2009 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Momentan herrscht ein gewisser Mangel an neuen Aufgaben. Aufgabenvorschläge können ebenfalls über die obige Adresse eingesandt werden.

**Aufgabe 1266:** Ein Fussboden ist mit gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1 belegt. Auf einem Dreieck steht eine Spielfigur. Ein Spielzug verläuft folgendermassen: Befindet sich die Figur auf einem Dreieck  $\Delta$ , so wird mit Hilfe eines Würfels oder eines Glücksrads eines der drei Nachbardreiecke von  $\Delta$  zufällig ausgewählt und die Figur dorthin gesetzt. Lässt sich die Menge der bis anhin besuchten Dreiecke (inklusive das Ausgangsdreieck) nicht mehr mit einem Einheitskreis überdecken, so ist das Spiel aus. Dies ist nach einer zufälligen Anzahl  $N$  von Zügen der Fall. Man berechne den Erwartungswert von  $N$ .

Christian Blatter, Greifensee, CH

**Aufgabe 1267:** Eine Maus startet im Punkt  $A = (1, 0)$  und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  auf der Geraden  $m : x = 1$ . Zeitgleich startet eine Katze mit der Geschwindigkeit  $k \cdot v$  ( $k > 1$ ) im Ursprung  $O = (0, 0)$  horizontal; sie hält dauernd Kurs auf die Maus. In welchem Punkt schnappt die Katze die Maus? Wie verläuft das Rennen für  $k = 1$ ?

François Sigrist, Neuchâtel, CH

**Aufgabe 1268 (Die einfache dritte Aufgabe):** Ein Velofahrer überquert einen Pass (Bergfahrt, dann Scheiteltunnel, dann Talfahrt) von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  in 185 Minuten. Für die Gegenrichtung von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{A}$  benötigt er 225 Minuten. Aufwärts fährt er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16 km/h, abwärts mit 48 km/h, und den horizontalen Scheiteltunnel passiert er in beiden Richtungen mit  $v$  km/h.

Für welchen Wert von  $v$  lässt sich die Gesamtstrecke von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  berechnen, und wie gross ist sie dann? Welche Aussage lässt sich in diesem Fall über die Länge der drei Teilstrecken machen?

Hans Egli, Zürich, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2008

**Aufgabe 1254.** Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit  $f(0) = 0$ , und es gelte

$$f'(x) + \sin(x) \leq 1 + \sin(f(x)) \quad \text{für } x \geq 0.$$

Beweise, dass  $f(x) \leq x$  für  $x \geq 0$ .

Mihály Bencze, Braşov, RO

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 8 Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hongkong, CHN), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Franz Spirig (Rorschacherberg, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Die meisten Löser verwenden in ihrem Lösungsweg Eigenschaften der Sinusfunktion, welche über die stetige Differenzierbarkeit hinausgehen. *Franz Spirig* beweist die folgende massive Verallgemeinerung: Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit  $f(0) = 0$ , und  $g$  sei eine auf  $\mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktion, und es gelte

$$f'(x) + g(x) \leq 1 + g(f(x)) \quad \text{für } x \geq 0.$$

Dann gilt  $f(x) \leq x$  für  $x \geq 0$ .

Die Funktion  $h(x) = x - f(x)$  ist differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - f'(x) \geq g(x) - g(f(x)) = g(\overbrace{f(x) + h(x)}^{=x}) - g(f(x)) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [g(f(x) + t \cdot h(x))] dt = h(x) \cdot \int_0^1 g'(f(x) + t \cdot h(x)) dt. \end{aligned}$$

Weil  $g'$ ,  $f$  und  $h$  stetig sind, ist die Funktion  $a(x) = \int_0^1 g'(f(x) + t \cdot h(x)) dt$  ebenfalls stetig, sie besitzt also eine Stammfunktion  $A(x)$ .

Es gilt folglich

$$\begin{aligned} h'(x) \geq h(x) \cdot A'(x) &\iff (h(x) \cdot e^{-A(x)})' \geq 0 \\ &\implies h(x) \cdot e^{-A(x)} \geq h(0) \cdot e^{-A(0)} = 0 \quad \text{für } x \geq 0 \\ &\implies h(x) \geq 0 \quad \text{für } x \geq 0 \\ &\implies x \geq f(x) \quad \text{für } x \geq 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 1255.** In die  $2n$  Felder eines  $2 \times n$ -Rechtecks fülle man natürliche Zahlen 1, 2, 3, 4 so ein, dass die Summe der Zahlen in jedem Teilquadrat 6 oder 7 beträgt. Man bestimme die Anzahl  $e_n$  der möglichen Einfüllungen rekursiv und als Funktion von  $n$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

*Hans Heiner Storrer* und *Harald Merk* argumentieren wie folgt: Die 30 möglichen  $2 \times 2$ -Teilquadrate des  $2 \times n$ -Rechtecks ( $n \geq 2$ ) sind:

1 1 3 1	1 1 4 1	2 1 2 1	2 1 3 1	3 1 1 1	3 1 2 1	4 1 1 1			
1 1 2 2	1 1 3 2	2 1 1 2	2 1 2 2	3 1 1 2	1 2 2 1	1 2 3 1	2 2 1 1	2 2 2 1	3 2 1 1
1 1 1 3	1 1 2 3	2 1 1 3	1 2 1 2	1 2 2 2	2 2 1 2	1 3 1 1	1 3 2 1	2 3 1 1	
1 1 1 4	1 2 1 3	1 3 1 2	1 4 1 1						

In der ersten Zeile befinden sich die Quadrate, deren rechte Spalte die Spaltensumme  $s = 2$  aufweist, was auf  $s - 1 = 1$  Art möglich ist. Die zweite Zeile enthält die Quadrate, deren rechte Spaltensumme  $s = 3$  beträgt, wofür es  $s - 1 = 2$  Arten gibt. Entsprechend ist in den anderen Zeilen das Erreichen der rechten Spaltensumme  $s = 4$  und  $s = 5$  auf jeweils  $s - 1$  Arten möglich.

Wir gehen zuerst rekursiv vor. Aus einer gültigen Belegung eines  $2 \times k$ -Rechtecks erhält man genau dann eine gültige Belegung eines  $2 \times (k + 1)$ -Rechtecks, wenn sich die  $k$ -te Spaltensumme (die Summe der beiden Einträge in der  $k$ -ten Spalte) und die  $(k + 1)$ -te Spaltensumme zu 6 oder 7 addieren.

Es sei nun  $a_k^{(s)}$  die Anzahl aller gültigen Belegungen eines  $2 \times k$ -Rechtecks, deren letzte Spalte die Spaltensumme  $s$  hat ( $s = 2, 3, 4, 5$ ). Die Gesamtzahl aller Belegungen beträgt dann

$$e_k = \sum_{s=2}^5 a_k^{(s)}. \quad (1)$$

Wir untersuchen nun, wie viele Möglichkeiten es gibt, einem gültigen Schema mit der letzten Spaltensumme  $s$  eine Spalte derart anzufügen, dass wieder ein gültiges Schema entsteht.

Zu  $s = 2$  gibt es 4 Möglichkeiten mit Spaltensumme 5 und 3 Möglichkeiten mit Spaltensumme 4.

Zu  $s = 3$  gibt es 3 Möglichkeiten mit Spaltensumme 4 und 2 Möglichkeiten mit Spaltensumme 3.

Zu  $s = 4$  gibt es 2 Möglichkeiten mit Spaltensumme 3 und 1 Möglichkeit mit Spaltensumme 2.

Zu  $s = 5$  gibt es 1 Möglichkeit mit Spaltensumme 2.

Daraus liest man die folgenden Rekursionsformeln ab:

$$\begin{aligned} a_{k+1}^{(2)} &= a_k^{(4)} + a_k^{(5)}, & a_{k+1}^{(3)} &= 2a_k^{(3)} + 2a_k^{(4)}, \\ a_{k+1}^{(4)} &= 3a_k^{(2)} + 3a_k^{(3)}, & a_{k+1}^{(5)} &= 4a_k^{(2)}. \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_k^{(2)} \\ a_k^{(3)} \\ a_k^{(4)} \\ a_k^{(5)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

erhalten wir die zusammengefasste Rekursionsformel

$$\vec{a}_{k+1} = A\vec{a}_k. \quad (2)$$

Da es  $s - 1$  Spalten mit Spaltensumme  $s$  gibt, startet die Rekursion mit

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Man findet für die ersten Werte

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 38 \\ 51 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 79 \\ 178 \\ 153 \\ 52 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 205 \\ 662 \\ 771 \\ 316 \end{pmatrix}.$$

Die Formel (1) für die gesuchte Grösse  $e_k$  kann auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$e_k = (1 \ 1 \ 1 \ 1)\vec{a}_k. \quad (3)$$

Aus (1) oder (3) erhält man somit  $e_2 = 30$ ,  $e_3 = 130$ ,  $e_4 = 462$ ,  $e_5 = 1954$ .

Für eine explizite Form gehen wir von der aus (2) folgenden Beziehung

$$\vec{a}_{k+1} = A^k \vec{a}_1 \quad (4)$$

aus. Mit bekannten Methoden der linearen Algebra bestimmen wir eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $V$  mit  $A = VD V^{-1}$ . Wir finden

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \frac{1}{350} \begin{pmatrix} 40 & 60 & 40 & 10 \\ 140 & -70 & 0 & 70 \\ 35 & -35 & 35 & -35 \\ -45 & -15 & 25 & 15 \end{pmatrix}.$$

(Die Diagonalelemente von  $D$  sind die Eigenwerte von  $A$ .) Wegen (4) ist

$$\vec{a}_{k+1} = A^k \vec{a}_1 = (VDV^{-1})^k \vec{a}_1 = VD^k V^{-1} \vec{a}_1,$$

und wegen (3) ist

$$e_{k+1} = (1 \ 1 \ 1 \ 1) \vec{a}_{k+1} = (1 \ 1 \ 1 \ 1) VD^k V^{-1} \vec{a}_1. \quad (5)$$

Nun ist aber

$$D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Werte für  $V$ ,  $D^k$ ,  $V^{-1}$  und  $\vec{a}_1$  ein und rechnet das Matrizenprodukt in (5) aus, so folgt

$$e_{k+1} = \frac{1}{35} (256 \cdot 4^k + 56 \cdot 2^k + 14 \cdot (-1)^k + 24 \cdot (-3)^k)$$

bzw. (mit  $k + 1 = n$  gemäss Aufgabenstellung)

$$e_n = \frac{1}{35} (64 \cdot 4^n + 28 \cdot 2^n - 14 \cdot (-1)^n - 8 \cdot (-3)^n). \quad (6)$$

Bemerkungen:

1. Es gibt  $a_1^{(2)} + a_1^{(3)} + a_1^{(4)} + a_1^{(5)} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  Rechtecke vom Format  $2 \times 1$ . Weil sie keine Teilquadrate enthalten, ist die Summenbedingung erfüllt. Formel (6) liefert für  $n = 1$  in der Tat den Wert 10.
2. Das Ergebnis (6) legt nahe, die Theorie der linearen Rekursionen zu Hilfe zu ziehen. Das zur Rekursion, welche die Folge  $e_1, e_2, e_3, \dots$  erfüllt, gehörige charakteristische Polynom ist

$$(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24.$$

Die Folge ( $e_n$ ) genügt also der Rekursion

$$e_{n+1} = 2e_n + 13e_{n-1} - 14e_{n-2} - 24e_{n-3} \quad (n \geq 4).$$

Die Anfangswerte sind  $e_1 = 10, e_2 = 30, e_3 = 130, e_4 = 462$ .

**Aufgabe 1256 (Die einfache dritte Aufgabe).** Man drücke

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \sin(\beta - \gamma) \\ & + \sin(\gamma) \sin(\delta) \sin(\gamma - \delta) + \sin(\delta) \sin(\alpha) \sin(\delta - \alpha) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta) \cos(\gamma) \sin(\beta - \gamma) \\ & + \cos(\gamma) \cos(\delta) \sin(\gamma - \delta) + \cos(\delta) \cos(\alpha) \sin(\delta - \alpha) \end{aligned}$$

jeweils als Produkt von drei Sinustermen aus.

Stanley Rabinowitz, Chelmsford, USA

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 17 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Oleh Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Jany C. Binz*, der die komplexe Darstellung der trigonometrischen Funktion verwendet:

Beide Summen lassen sich zu

$$Z = \sin(\alpha - \gamma) \sin(\beta - \delta) \sin(\alpha + \gamma - \beta - \delta)$$

komprimieren.

*Beweis:* Mit  $a = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$  und  $b = \cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)$  erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{8i} (a - \bar{a})(b - \bar{b})(a\bar{b} - \bar{a}b) \\ &= -\frac{1}{8i} (a^2 - b^2 + \bar{a}^2 b^2 - a^2 \bar{b}^2 + \bar{b}^2 - \bar{a}^2), \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha - \beta) &= \frac{1}{8i} (a + \bar{a})(b + \bar{b})(a\bar{b} - \bar{a}b) \\ &= \frac{1}{8i} (a^2 - b^2 - \bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}^2 + \bar{b}^2 - \bar{a}^2). \end{aligned}$$

Mit  $c = \cos(\gamma) + i \cdot \sin(\gamma)$  und  $d = \cos(\delta) + i \cdot \sin(\delta)$  erhält man analoge Terme. Die Summe  $X$  der Sinusprodukte und die Summe  $Y$  der gemischten Produkte werden beide

$$X = Y = \frac{1}{8i} (a^2 \bar{b}^2 - \bar{a}^2 b^2 + b^2 \bar{c}^2 - \bar{b} c^2 + c^2 \bar{d}^2 - \bar{c}^2 d^2 + d^2 \bar{a}^2 - \bar{d}^2 a^2).$$

Es bleibt  $Z = X$  zu verifizieren:

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{1}{8i} \left( \frac{a}{c} - \frac{\bar{a}}{\bar{c}} \right) \left( \frac{b}{d} - \frac{\bar{b}}{\bar{d}} \right) \left( \frac{ac}{bd} - \frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{b}\bar{d}} \right) \\ &= -\frac{1}{8i} (a\bar{c} - \bar{a}c)(b\bar{d} - \bar{b}d)(a\bar{b}c\bar{d} - \bar{a}b\bar{c}d) \\ &= -\frac{1}{8i} (ab\bar{c}\bar{d} - \bar{a}b\bar{c}d - \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d)(a\bar{b}c\bar{d} - \bar{a}b\bar{c}d) \\ &= -\frac{1}{8i} (a^2 \bar{d}^2 - b^2 \bar{c}^2 - a^2 \bar{b}^2 + \bar{c}^2 d^2 - c^2 \bar{d}^2 + \bar{a}^2 b^2 + \bar{b}^2 c^2 - \bar{a}^2 d^2) = X. \end{aligned}$$