Elem. Math. 64 (2009) 87 – 88
0013-6018/09/020087-2

Elemente der Mathematik

Bücher und Computersoftware

C. E. Silva: Invitation to Ergodic Theory. ix+262 pages, $ 45.–. American Mathematical Society, Student Mathematical Library, Volume 42, 2008; ISBN 978-0-8218-4420-5.

The author presents in a very pleasant and readable way an introduction to ergodic theory for measure-preserving transformations of probability spaces. In my opinion, the book provides guidelines, classical examples and useful ideas for an introductory course in ergodic theory to students that have not necessarily already been taught Lebesgue measure theory. The prerequisites for reading the monograph are modest: a good knowledge of the topology of $\mathbb{R}$ and basic notions on metric spaces are sufficient (two appendices are devoted to these notions).

After a short introduction to the subject motivated by problems in statistical mechanics, Chapter 2 develops the construction of Lebesgue measure on $\mathbb{R}$ in a rather natural way: It starts with the definition of the corresponding outer measure $\lambda^*(E)$ for an arbitrary subset E of $\mathbb{R}$, and defines measurable sets as those subsets A of $\mathbb{R}$ such that, for every $\varepsilon > 0$, one can find an open set $G = G_\varepsilon \supset A$ so that $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Observe that this point of view avoids the notion of σ-algebra which is introduced later.

The third chapter enters the subject of ergodicity through examples: The first one is a version of the two-dimensional Baker's Transformation whose mixing property is more suggested intuitively than proved rigorously. The second family of examples is the set of irrational rotations, and the final and very classical example is the doubling map T on $[0, 1)$ defined by $T(x) = 2x \pmod 1$. The same chapter continues with more theoretical sections (measure-preserving transformations, recurrence, general ergodic transformations, induced transformations) and ends with the dyadic odometer realized on $[0, 1)$ – which is not the most achieved section of the book – and with the shift operator on symbolic spaces.

Chapter 4 is devoted to Lebesgue integral and to an introduction to L^p spaces, and it is very classical. It also contains a brief presentation of the Gauss map $T(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, but I regret the absence of the relationship between the Gauss map and continued fractions.

Unavoidable in such a treatise, Birkoff's theorem is presented in Chapter 5. Let us recall briefly its statement: If T is a measure-preserving transformation on a probability space $(X, \mathcal{S}, \mu)$ and if f is an integrable function on X, then the sequence of averages $(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f \circ T^i)_{N \geq 1}$ converges a.e. to an integrable function $\tilde{f}$, and $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$. Two proofs of Birkoff's theorem are presented, and it is worth mentioning that the first one assumes the stronger assumption that T is ergodic, but that it yields at the same time the existence of the limit and its equality a.e. with the integral of f. As an application, it is proved that almost every number $x \in [0, 1]$ is normal in base 2: the frequency of 0's in the binary expansion of x equals $\frac{1}{2}$. The same chapter ends with the Mean Ergodic Theorem in the L^2 and L^1 cases.

The last chapter covers a rather detailed treatment of mixing notions: It contains the various and classical characterizations of mixing and of weakly mixing transformations (including a partial proof of the equivalence between weak mixing and continuous spectrum), and it also contains a construction of the Chacón's transformation on $[0, 1)$ that provides an example of a weakly mixing transformation that is not mixing. The author has also included a short introduction to mildly mixing and lightly mixing transformations. The latter notion is used for the following reason: as is well-known, it is sufficient to verify ergodicity, weak and strong mixing properties on elements of suitable semi-rings of subsets instead of arbitrary measurable subsets (which are rather intractable in general). If $\mathcal{A}$ is an algebra of subsets of X which is contained in the σ-algebra $\mathcal{S}$, one says that a transformation T is lightly mixing on $\mathcal{A}$ if $\liminf_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ for all positive subsets $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{S}$. It is obvious that, if T is lightly mixing on $\mathcal{S}$, then it is weakly mixing. However, the author gives an example of a lightly mixing transformation on the algebra of intervals in [0, 1] that is not weakly mixing.

One also finds several exercises of various levels at the end of each section, and the hardest ones are marked with a star ($*$). The author promises a book's webpage which is supposed to contain partial solutions and hints for some exercises, but, at the time of this writing, it is not yet available. Finally, a few open questions close some sections in order to "suggest to the reader some avenues of research".

As a conclusion, I think that this very good book could be of interest for instructors who intend to give introductory lectures on measure theory and/or ergodic theory, and for mathematicians and advanced students who wish to learn these topics.

Paul Jolissaint, Porrentruy

E. Behrends, P. Gritzmann, G.M. Ziegler (Hrsg.): Pi und Co. – Kaleidoskop der Mathematik. 387 Seiten, SFr 41.–. Springer-Verlag, Berlin, 2008; ISBN 978-35407-7888-2.

Rechtzeitig zu dem in Deutschland gefeierten Jahr der Mathematik hat der Springer-Verlag in enger Zusammenarbeit mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ein Buch mit einer Sammlung von Artikeln über die „Königin der Wissenschaften" herausgegeben. Das Lesebuch ist eine anregende Lektüre für begabte Mittelschüler und interessierte Laien. Deshalb ist es durchaus passend, dass es – als Stiftung des Springer-Verlags – an allen deutschen Gymnasien dem Schüler mit dem jeweils besten Mathematik-Abitur als Preis überreicht wird.

Die Herausgeber unterstreichen, dass Mathematik nicht nur das Denkvermögen schule, sondern auch ästhetisch, kreativ, spannend und unterhaltsam sei. Dass all diese Adjektive tatsächlich zur Mathematik passen, wird sodann in den Texten belegt. Dabei beschränken sich die Herausgeber in ihrer „Collage" nicht nur auf das leicht Lesbare. Sie scheuen sich auch nicht, anspruchsvollere Texte in die Sammlung aufzunehmen. Wie im Vorwort erwähnt, kann übersprungen und weitergeblättert werden. Jedes Kapitel fängt mit etwas Neuem wieder von vorne an. In etwa vierzig Beiträgen, die schon früher in Zeitschriften erschienen sind, werden unter dem Obertitel „Dauerbrenner" Primzahlen, Unendlichkeit, Wahrscheinlichkeit oder Dimensionen aus jeweils vier oder fünf verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Bei den „harten Nüssen" liest man über den Satz von Fermat oder die Zeta-Funktion, bei den „heissen Themen" gibt es Kapitel über Optimierung, Finanzmathematik, Kryptografie, Spieltheorie, und in „Mathematik ohne Grenzen" wird schliesslich die Rolle der Mathematik in der bildenden Kunst, der Architektur, der Musik oder der Medizin dargestellt.

Das Einzige, das an dem Band stört, ist die grafische Aufbereitung. Der unveränderte Nachdruck früherer Artikel und Buchkapitel bringt es mit sich, dass das Schriftbild und die Grafik uneinheitlich sind, was dem Band eine aufgeregte Unruhe verleiht. Abgesehen davon bietet das Buch aber einen anregenden Streifzug durch die Mathematik.

George Szpiro, Jerusalem

Wir danken dem Autor für die freundliche Genehmigung, seine Buchbesprechung aus der *Neuen Zürcher Zeitung* vom 3. September 2008 hier erneut abdrucken zu dürfen.

S.-M. Belcastro, C. Yackel (Hrsg.): Making Mathematics with Needlework: Ten Papers and Ten Projects. 200 Seiten, Hardcover, \$ 30.00. A K Peters, 2007; ISBN 978-1-56881-331-8.

Das Buch *Making Mathematics with Needlework* ist wohl das erste, das über Mathematik und Handarbeit berichtet. Es besteht aus zehn voneinander unabhängigen Kapiteln verschiedener Autoren, von denen jedes einem mathematischen Objekt oder Thema gewidmet ist, wie zum Beispiel dem Möbiusband, den diophantischen Gleichungen oder der Graphentheorie. Jedes Kapitel erklärt ein mathematisches Konzept, zeigt, wie man einen zu diesem Thema passenden Gegenstand – zumeist mit der Strick- oder Häkelnadel – anfertigen kann, und wird mit Vorschlägen für den Mathematikunterricht abgerundet.

Das Buch ist sowohl für Mathematiker und Leser mit mathematischen Grundkenntnissen geeignet, die Handarbeit gern haben, als auch für alle Mathematiklehrer, die den Mathematikunterricht unterhaltsamer gestalten wollen. Es ist mit zahlreichen schönen und hilfreichen Bildern ausgestattet. Alle mathematischen Konzepte sind sehr anschaulich erklärt, so auch die im Rahmen des Buches abstrakteren Begriffe „Homologie" und „projektiver Raum". Schliesslich ist das Buch ideal für all diejenigen, die einen Sierpinskischal, eine Möbiusmütze, oder algebraische Socken tragen wollen.

Laura Ciobanu, Fribourg

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*