
Bücher und Computersoftware

S. Buyalo, V. Schroeder: Elements of Asymptotic Geometry. 212 Seiten, hardcover, € 58.–. EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society 2007; ISBN 978-3-03719-036-4.

Gegenstand dieses Buches ist das Studium asymptotischer Eigenschaften metrischer Räume, also ihrer Struktur „im Unendlichen“. Im Zentrum stehen dabei die von Gromov in den 1980er Jahren entdeckten und nach ihm benannten *Gromov-hyperbolischen* Räume. Diese metrischen Räume stellen eine weitreichende Verallgemeinerung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung dar, insbesondere also der klassischen hyperbolischen Geometrie, mit ähnlichen asymptotischen Eigenschaften.

Morse [Mo] hat im Jahre 1924 gezeigt, dass sich Geodätische in Riemannschen Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung durch ein bemerkenswertes Stabilitätsverhalten auszeichnen: Betrachtet man auf einer solchen Mannigfaltigkeit eine weitere, Lipschitz-äquivalente Metrik mit beliebiger Krümmung, so existiert zu jeder ihrer (minimalen) Geodätischen eine Geodätische der negativ gekrümmten Metrik, welche in beschränktem Abstand zu ihr verläuft.

Gromov hat Mitte der 1980er Jahre bewiesen, dass sich dieses Stabilitätsverhalten auf alle Gromov-hyperbolischen *geodätischen* Räume überträgt. Solche Räume haben die zusätzliche Eigenschaft, dass sich jedes Punktepaar durch eine Geodätische verbinden lässt. Dabei versteht man unter Geodätischen isometrische Abbildungen eines Intervalles in einen metrischen Raum. Die Geodätischen in Gromov-hyperbolischen Räumen zeigen ähnliches Verhalten wie die negativ gekrümmter Riemannscher Mannigfaltigkeiten. So existiert eine positive Konstante δ dergestalt, dass alle geodätischen Dreiecke δ -dünn sind in dem Sinne, dass die δ -Umgebung von je zwei Dreiecksseiten die dritte enthält. Wie Gromov zeigte, überträgt sich das von Morse beschriebene Stabilitätsverhalten der Geodätischen auf diese sehr viel grössere Klasse metrischer Räume. Insbesondere liegt jede Quasi-Geodätische in beschränktem Abstand zu einer Geodätischen. Quasi-Geodätische sind quasi-isometrische Abbildungen eines Intervalles in einen metrischen Raum. Für Quasi-Isometrien zwischen metrischen Räumen ist auf einer genügend grossen Skala das Verhältnis der Abstände der Bildpunkte zu den Urbildpunkten durch positive Konstanten nach unten und nach oben beschränkt. Asymptotisch gesehen sind sie somit Bilipschitz-Abbildungen. Insbesondere sind Lipschitz-äquivalente Metriken zueinander quasi-isometrisch. Die Eigenschaft geodätischer metrischer Räume, Gromov-hyperbolisch zu sein, bleibt unter Quasi-Isometrien erhalten.

Wie bei den negativ gekrümmten Riemannschen Mannigfaltigkeiten lässt sich die Geometrie Gromov-hyperbolischer Räume durch ihren Rand im Unendlichen beschreiben. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Kompaktheit abgeschlossener Bälle entspricht jedem Punkt im Unendlichen eine Klasse von zueinander asymptotischen geodätischen Strahlen.

Weit über die Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung hinaus existieren grosse Klassen Gromov-hyperbolischer Räume. Beispiele findet man in der Theorie der endlich erzeugten Gruppen, wobei die Metrik mittels der Wortlänge definiert wird. Insbesondere sind die Fundamentalgruppen kompakter negativ gekrümmter Mannigfaltigkeiten und alle frei erzeugten Gruppen Gromov-hyperbolisch. Eine andere Klasse sind die CAT(-1) Räume. Dies sind geodätische metrische Räume, deren geodätische Dreiecke dünner sind als die der hyperbolischen Ebene mit konstanter Gaußkrümmung -1 . (Die Abkürzung CAT steht für „Comparison Alexandrov Triangle“.) Die Theorie der Gromov-hyperbolischen Räume hat wichtige Anwendungen in den Bereichen Gruppentheorie, dynamische Systeme, Starrheitstheorie und geometrische Topologie. Hier ist insbesondere die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten zu nennen.

In den ersten acht Kapiteln des Buches von Buyalo und Schroeder werden die Grundzüge der Theorie Gromov-hyperbolischer Räume entwickelt. Verschiedene Realisationen des Randes im Unendlichen werden behandelt. Als wichtiges Werkzeug werden die Busemann-Funktionen ausführlich diskutiert. Der Rand im Unendlichen erhält eine quasi-Möbius-Struktur. In Analogie zur klassischen Dualität zwischen Isometrien des hyperbolischen Raumes und Möbius-Transformationen wird gezeigt, dass gewisse quasi-isometrische Abbildungen zwischen Gromov-hyperbolischen Räumen sich zu quasi-Möbius-Abbildungen der Ränder im Unendlichen fortsetzen.

Desweiteren werden sogenannte Ausdehnungssätze behandelt. Dabei geht es darum, Abbildungen zwischen den Rändern zweier Gromov-hyperbolischer Räume zu Abbildungen ins Innere fortzusetzen. Insbesondere zeigen diese Resultate, dass die asymptotische Geometrie eines Raumes durch seinen Rand im Unendlichen bestimmt wird.

Schliesslich wird mit Hilfe der eingeführten Techniken der Einbettungssatz von Bonk und Schramm bewiesen [BoS]. Er besagt, dass eine grosse Klasse Gromov-hyperbolischer Räume bis auf eine additive Konstante homotetisch zu einer konvexen Teilmenge des hyperbolischen Raumes ist. Zu dieser Klasse gehören die Gromov-hyperbolischen Räume mit beschränkter Geometrie und alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit beidseitig negativ beschränkter Krümmung.

Im zweiten Teil des Buches werden Aspekte der asymptotischen Geometrie allgemeiner metrischer Räume diskutiert. Allerdings stehen hier gewisse Strukturen, wie z.B. der Rand im Unendlichen, nicht mehr als Werkzeuge zur Verfügung. Stattdessen werden verschiedene Typen asymptotischer Invarianten eingeführt, die auf der Dimensionstheorie metrischer Räume beruhen. Als Anwendung werden Einbettungs- und Nichteinbettungsergebnisse bewiesen.

Im Anhang werden Grundlagen aus der klassischen Theorie des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes zusammengestellt, die für das Verständnis der asymptotischen Geometrie metrischer Räume von grosser Bedeutung ist.

Das Buch basiert auf Vorträgen, die die Autoren am Steklov Institut in St. Petersburg und an der Universität Zürich gehalten haben. Es stellt eine verständliche Einführung in die Theorie der Gromov-hyperbolischen Räume dar. Ausserdem wird die asymptotische Geometrie allgemeiner metrischer Räume behandelt. Die Beweise sind vollständig und ausführlich. Die Theorie wird anhand vieler Beispiele illustriert, und die Beziehungen zu angrenzenden Gebieten werden dargestellt. Das Buch ist daher sehr empfehlenswert für Studierende und Forscher im Bereich der Differentialgeometrie, der geometrischen Topologie und der geometrischen Gruppentheorie.

[BoS] Bonk, M.; Schramm, O.: Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.* 10 (2000), 266–306.

[Gr] Gromov, M.: Hyperbolic groups. Essays in group theory. *Math. Sci. Res. Inst. Publ* 8, Springer Verlag, New York 1987, 75–263.

[Mo] Morse, H.-M.: A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Amer. Math. Soc.* 26 (1924), 25–60.

Gerhard Knieper, Bochum