
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2010 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Gartenstrasse 19, CH–5400 Baden

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1275: Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, und P sei ein Punkt der Seite $a = BC$. Von P aus werden die Lote auf die Seiten $b = CA$ und $c = AB$ errichtet, und P_b resp. P_c seien die Lotfußpunkte.

1. Wo auf der Seite a ist $P = \hat{A}$ zu wählen, damit das Viereck $AP_c\hat{A}P_b$ maximale Fläche erhält?
2. Es seien \hat{B} und \hat{C} auf den Seiten b und c analog definiert. Beweise, dass sich die drei Geraden $A\hat{A}$, $B\hat{B}$ und $C\hat{C}$ im Umkreiszentrum des Dreiecks ABC schneiden.

Mowaffaq Hajja, Irbid, JO und Panagiotis Krasopoulos, Athen, GR

Aufgabe 1276: Beweise, dass

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{96}{(14k+1)(14k+9)(14k+11)} \right) = 2.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1277 (Die einfache dritte Aufgabe): Die vier Seitenflächentrapeze eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfs weisen einen Neigungswinkel von α ($0 < \alpha < \pi$) gegenüber der Grundfläche auf und werden nach aussen in diese umgeklappt. Der Winkel zwischen zwei Schenkeln benachbarter Seitenflächentrapeze betrage dann β . Welche Beziehung besteht zwischen α und β ?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2009

Aufgabe 1263. Beweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \binom{2n}{n} (\sqrt{5} - 2)^n = \frac{2}{15} \pi^2 - 3 \ln^2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right).$$

Friedhelm Götze, Jena, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Ovidiu Furdui (Cluj, RO), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Wolfgang Stahl (Muggensturm, D), Michael Vowe (Therwil, CH) und Walther Janous (Innsbruck, A).

Die meisten Löser gehen ähnlich vor wie *Henri Carnal*, dessen Lösung unten abgedruckt ist und die sich von der Mehrzahl der Lösungen dadurch abhebt, dass (ausser der Summe der Quadrate der Kehrwerte der natürlichen Zahlen) keine Teilresultate aus Integral- und Reihentabellen benötigt werden. Die Funktion

$$t \mapsto (1-t)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}} = \frac{t}{\sqrt{1-t}(1 + \sqrt{1-t})}$$

besitzt die für $-1 \leq t < 1$ gültige MacLaurinsche Entwicklung

$$\frac{t}{\sqrt{1-t}(1 + \sqrt{1-t})} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{t}{4}\right)^n.$$

Nach Division durch t und Integration von 0 bis x folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n = -2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \right) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Division durch x und anschliessende Integration von 0 bis $4a$, wobei $a = \sqrt{5} - 2 = \sqrt{1-4a}$, ergibt

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{a^n}{n^2} = -2 \int_0^{4a} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \right) dx.$$

Die Substitution $y = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}$ liefert

$$S = 2 \int_b^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y} \right) \ln(y) dy = -\ln^2(b) - 2 \int_b^1 \frac{\ln(y)}{1-y} dy, \quad (1)$$

wobei die untere Grenze b durch $b = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} = \frac{1+a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gegeben ist.

Wir setzen nun

$$f(x) = - \int_x^1 \frac{\ln(y)}{1-y} dy, \quad g(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-y^2)}{y} dy, \quad h(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) + h'(x) &= \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x) + \ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} = [-\ln(x) \ln(1-x)]', \end{aligned}$$

und es folgt

$$f(x) + g(x) + h(x) = C - \ln(x) \ln(1-x). \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C berechnen wir den Funktionswert an der Stelle 0. $g(0) = h(0) = 0$ sind klar, ebenso $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1-x) = 0$. Somit gilt $C = f(0)$.

$$\begin{aligned} C = f(0) &= - \int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} dy = - \int_0^1 \frac{\ln(1-z)}{z} dz \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Um aus (1) den Wert der Summe S zu gewinnen, müssen wir $f(b)$ kennen. Dazu berechnen wir $g(b)$ und $h(b)$ und verwenden dann (2).

- Zur Bestimmung von $g(b) = - \int_0^b \frac{\ln(1-y^2)}{y} dy$ substituieren wir $z = 1 - y^2$ und beachten, dass $b = 1 - b^2$ gilt:

$$g(b) = - \int_0^b \frac{\ln(1-y^2)}{y} dy = - \frac{1}{2} \int_b^1 \frac{\ln(z)}{1-z} dz = \frac{1}{2} f(b).$$

- Zur Bestimmung von $h(b) = \int_0^b \frac{\ln(1+y)}{y} dy$ verwenden wir die Substitution $u = \frac{1}{1+y}$ und beachten, dass $b = \frac{1}{1+b}$ gilt:

$$\begin{aligned} h(b) &= \int_0^b \frac{\ln(1+y)}{y} dy = - \int_b^1 \frac{\ln(u)}{u(1-u)} du = - \int_b^1 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) \ln(u) du \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(b) + f(b). \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte für $g(b)$ und $h(b)$ in (2) ein, so ergibt sich

$$f(b) + \left(\frac{1}{2}f(b)\right) + \left(\frac{1}{2}\ln^2(b) + f(b)\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2\ln^2(b),$$

woraus sich $f(b) = \frac{\pi^2}{15} - \ln^2(b)$ entnehmen lässt. Setzt man dies in (1) ein, ergibt sich

$$S = -\ln^2(b) + 2f(b) = \frac{2\pi^2}{15} - 3\ln^2(b) = \frac{2\pi^2}{15} - 3\ln^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Aufgabe 1264. Alle Zahlen der Form $2^\alpha \cdot 10^\beta$ mit nicht-negativen ganzen Exponenten α und β werden der Grösse nach geordnet. Die so definierte Folge (a_n) beginnt mit

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 10, a_6 = 16, a_7 = 20, \dots$$

Man bestimme den Index n von a_n als Funktion $n = f(\alpha, \beta)$, und für die Umkehrung $(\alpha, \beta) = f^{-1}(n)$ finde man einen einfachen Algorithmus.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. 6 Löser haben Zuschriften eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Wir folgen *Frieder Grupp*: Wir verwenden die Bezeichnungen $\ell := \log_2(10)$ und $\gamma := \alpha + \ell\beta$. Es seien α und β gegeben, und es sei $n = f(\alpha, \beta)$. Dann haben für $r = 0, 1, \dots, R = \lfloor \frac{\gamma}{\ell} \rfloor$ genau die folgenden Zahlen einen Index $\leq n$:

$$2^0 \cdot 10^r, 2^1 \cdot 10^r, \dots, 2^{D_r} \cdot 10^r \quad \text{mit } D_r = \lfloor \alpha + (\beta - r)\ell \rfloor = \lfloor \gamma - r\ell \rfloor.$$

Deshalb gilt

$$n = \sum_{r=0}^R (D_r + 1) = \sum_{r=0}^R \lfloor 1 + \gamma - r\ell \rfloor = \sum_{r=0}^{\lfloor \alpha \log_{10}(2) + \beta \rfloor} \lfloor 1 + \alpha + (\beta - r)\log_2(10) \rfloor.$$

Wegen $\lfloor x \rfloor \leq x$ folgt

$$n \leq \sum_{r=0}^R (1 + \gamma - r\ell) = \left(1 + \left\lfloor \frac{\gamma}{\ell} \right\rfloor\right) \left(1 + \gamma - \frac{\ell}{2} \left\lfloor \frac{\gamma}{\ell} \right\rfloor\right),$$

und mit $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$ hat man schliesslich

$$n \leq \frac{\gamma^2}{2\ell} + \gamma \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{2}\right) + 1 + \left(\frac{\ell}{2} - 1\right) \left\{ \frac{\gamma}{\ell} \right\} - \frac{\ell}{2} \left\{ \frac{\gamma}{\ell} \right\}^2.$$

Wegen $\max_{0 \leq \lambda < 1} \left\{ 1 + \left(\frac{\ell}{2} - 1\right)\lambda - \frac{\ell}{2}\lambda^2 \right\} = \frac{1}{2} + \frac{\ell}{8} + \frac{1}{2\ell}$ hat man nun

$$n \leq \frac{\gamma^2}{2\ell} + \gamma \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\ell}{8} + \frac{1}{2\ell} =: \overline{G}(\gamma).$$

Nun ist $\overline{G}\left(\sqrt{2\ell n} - \left(1 + \frac{\ell}{2}\right)\right) = n$, also gilt

$$\gamma \geq \sqrt{2\ell n} - \left(1 + \frac{\ell}{2}\right).$$

Wegen $\lfloor x \rfloor > x - 1$ gilt weiter

$$\begin{aligned} n &= \sum_{r=0}^R \lfloor 1 + \alpha + \ell(\beta - r) \rfloor = 1 + \alpha + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq \beta}}^R \lfloor 1 + \alpha + \ell(\beta - r) \rfloor \\ &> 1 + \sum_{r=0}^R (\gamma - r\ell) = 1 - \frac{\ell}{2}R(R+1) + \gamma(R+1). \end{aligned}$$

Setzen wir $R = \frac{\gamma}{\ell} - \left\{\frac{\gamma}{\ell}\right\}$ ein, so ergibt sich

$$n > \frac{\gamma^2}{2\ell} + \frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{\ell}{2} \left(\left\{\frac{\gamma}{\ell}\right\} - \left\{\frac{\gamma}{\ell}\right\}^2 \right) \geq \frac{\gamma^2}{2\ell} + \frac{\gamma}{2} + 1 =: \underline{G}(\gamma).$$

Aus $\underline{G}\left(\sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2}\right) = n - \frac{\ell}{8} + 1 > n$ folgt

$$\gamma < \sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2}.$$

Insgesamt hat man also die Ungleichungskette

$$\sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2} - 1 \leq \gamma = \alpha + \ell\beta < \sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2}, \quad (\star)$$

welche nun den Schlüssel zum gesuchten Algorithmus liefert.

Zu jedem

$$\beta \in \left\{0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \sqrt{\frac{2n}{\ell}} - \frac{1}{2} \right\rfloor\right\} =: \mathcal{Q}$$

gibt es also genau ein

$$\alpha(\beta) = \left\lfloor \sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2} - \ell\beta \right\rfloor,$$

so dass (\star) erfüllt ist. Man berechne also die $Q + 1$ Zahlen

$$\gamma = \left\lfloor \sqrt{2\ell n} - \frac{\ell}{2} - \ell\beta \right\rfloor + \ell\beta \quad (\beta = 0, 1, \dots, Q)$$

und werte anschliessend die $Q + 1$ zugehörigen Summen $\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{\gamma}{\ell} \rfloor} \lfloor 1 + \gamma - r\ell \rfloor$ aus. Genau eine davon hat den Wert n . Man kann den Berechnungsaufwand auf $O(\log(n))$ Auswertungen reduzieren, wenn man berücksichtigt, dass die Summen monoton wachsend in γ sind und wenn man geschickt sortiert.

Aufgabe 1265 (Die einfache dritte Aufgabe). Wir betrachten die (rechte) Endziffer der k -ten Potenzen der natürlichen Zahlen. Es sei

$$E(k) = \{e \mid \text{für ein } n \in \mathbb{N} \text{ endet die Dezimalzahl } n^k \text{ mit der Ziffer } e\}.$$

Man beweise für $k \in \mathbb{N}$ die Formel

$$E(k) = \begin{cases} \{0, 1, 5, 6\} & \text{falls } k \equiv 0 \pmod{4} \\ \{0, 1, 4, 5, 6, 9\} & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{4} \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} & \text{falls } k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Wir folgen *Stefan Grieder*: Im Prinzip geht es darum, die Potenzen von n modulo 10 zu bestimmen. Wegen des kleinen Satzes von Fermat gilt $n^5 \equiv n \pmod{5}$, und weil die Parität erhalten bleibt, gilt sogar $n^5 \equiv n \pmod{10}$. Die Mengenfolge $E(1), E(2), E(3), \dots$ ist also periodisch mit Periodenlänge 4, und es genügt deshalb, $E(1), E(2), E(3)$ und $E(4)$ zu bestimmen. Weiter kann man wegen der Erhaltung der Parität leicht von den Potenzen auf der Restklassenmenge modulo 5 auf die Potenzen auf der Restklassenmenge modulo 10 schliessen.

Es ist klar, dass $E(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist, weil $n^1 = n$.

Wieder nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $n^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$, deshalb gilt $E(4) = \{0, 1, 5, 6\}$.

Weil die Restklassengruppe modulo 5 zyklisch der Ordnung 4 ist, ist $n \mapsto n^3$ eine Bijektion der Restklassenmenge modulo 5. Daraus folgt $E(3) = E(1)$.

Modulo 5 wird die Restklassengruppe von der Zahl 2 erzeugt, deshalb gilt $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$, und daraus folgt $E(2) = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.