Elem. Math. 65 (2010) 81 – 85
0013-6018/10/020081-5
DOI 10.4171/EM/144

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2010 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1278: Für $1 \leq j, k \leq 9$ sei $s(j, k)$ die Zahl, welche in einem Sudoku in der Zeile j und der Spalte k steht.

Man gebe eine möglichst kurze Formel an, welche

a) ein vollständiges Sudoku definiert.

b) ein vollständiges Pansudoku definiert, also ein Sudoku, bei welchem auch in den beiden Diagonalen jede Ziffer $1, 2, \ldots, 9$ genau einmal steht.

Ernst Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1279: Mit Elementen aus dem Alphabet $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ bilde man n-stellige Sequenzen, die keine Dreierblöcke xyx $(y \neq x,\ \ x, y \in A)$ enthalten. Man bestimme deren Anzahl a_n sowohl rekursiv als auch als Funktion von n.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1280 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Felder eines 5×5-Quadrates sollen so mit den Ziffern 1 bis 5 belegt werden, dass jede Ziffer in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau einmal vorkommt. Auf wie viele Arten ist das möglich? (5-er Pansudoku)

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2009

Aufgabe 1266. Ein Fussboden ist mit gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1 belegt. Auf einem Dreieck steht eine Spielfigur. Ein Spielzug verläuft folgendermassen: Befindet sich die Figur auf einem Dreieck Δ, so wird mit Hilfe eines Würfels oder eines Glücksrads eines der drei Nachbardreiecke von Δ zufällig ausgewählt und die Figur dorthin gesetzt. Lässt sich die Menge der bis anhin besuchten Dreiecke (inklusive das Ausgangsdreieck) nicht mehr mit einem Einheitskreis überdecken, so ist das Spiel aus. Dies ist nach einer zufälligen Anzahl N von Zügen der Fall. Man berechne den Erwartungswert von N.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingetroffen, von denen nicht alle korrekt waren: Alexander Boffinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Henri Carnal argumentiert wie folgt: Verschiedene Dreiecke können genau dann von einem Einheitskreis überdeckt werden, wenn sie Teile eines Hexagons mit Seitenlänge 1 sind. Wir zerlegen nun das Spiel in drei Phasen:

- Die erste Phase besteht nur aus dem ersten Zug. Danach hat man zwei Dreiecke besucht, die einen Rhombus $\mathcal{R}$ bilden.
- Die zweite Phase besteht aus N_2 Zügen bis zum Verlassen von $\mathcal{R}$. Bei jedem Zug bleibt man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ in $\mathcal{R}$, also ist $P(N_2 > k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ und
$$E(N_2) = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}.$$
Danach bilden die besuchten Dreiecke ein Trapez $\mathcal{T}$, welches durch eine Spiegelung an der längsten Seite zu einem Hexagon $\mathcal{H}$ ergänzt wird.
- Die dritte Phase besteht aus N_3 Zügen bis zum Verlassen von $\mathcal{H}$. Bei jedem Zug (aus einem Dreieck von $\mathcal{H}$) bleibt man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ in $\mathcal{H}$, also ist $P(N_3 > k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ und
$$E(N_3) = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3.$$

Daher gilt
$$E(N) = E(1 + N_2 + N_3) = 1 + \frac{3}{2} + 3 = \frac{11}{2}.$$

Aufgabe 1267. Eine Maus startet im Punkt $A = (1, 0)$ und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v auf der Geraden $m : x = 1$. Zeitgleich startet eine Katze mit der

Geschwindigkeit $k \cdot v$ $(k > 1)$ im Ursprung $O = (0, 0)$ horizontal; sie hält dauernd Kurs auf die Maus. In welchem Punkt schnappt die Katze die Maus? Wie verläuft das Rennen für $k = 1$?

François Sigrist, Neuchâtel, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Alexander Boffinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Wir folgen *Roland Wyss*: Weil zur Zeit t der Weg der Maus vt und jener der Katze kvt betragen, erhält man für den Kurs $y = y(x)$ der Katze folgende Gleichungen:

$$\int_0^x \sqrt{1 + (y'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi = kvt, \tag{1}$$

$$\frac{vt - y(x)}{1 - x} = y'(x). \tag{2}$$

Elimination von vt aus (1) und (2) führt zu

$$\frac{1}{k}\int_0^x \sqrt{1 + (y'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi - y = y' - xy',$$

und durch Ableiten nach x ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{1}{k(1 - x)} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Ihre Integration ergibt vorerst

$$\ln\left(y' + \sqrt{1 + (y')^2}\right) = -\frac{1}{k}\ln(1 - x) + C,$$

wobei wegen $y'(0) = 0$ die Integrationskonstante C verschwindet. Durch Auflösen nach y' erhält man für die Ableitung der Bahnkurve

$$y' = \frac{1}{2}\left((1 - x)^{-1/k} - (1 - x)^{1/k}\right). \tag{3}$$

Für $k > 1$ erhält man durch elementare Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

$$y = \frac{k}{2(k + 1)}\left((1 - x)^{\frac{k+1}{k}} - 1\right) - \frac{k}{2(k - 1)}\left((1 - x)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right).$$

Für den gesuchten Treffpunkt erhält man für $x = 1$ die Ordinate $y = \frac{k}{k^2-1}$.
Für $k = 1$ liefert die Integration von (3) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung die Kurve

$$y = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

welche den Mausweg $m : x = 1$ als Asymptote besitzt, so dass also kein Zusammentreffen stattfindet.

Bemerkungen:

- *Jürgen Spilker* rät der Katze, von O aus geradlinig mit der Steigung $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ wegzurennen. Dann schnappt sie die Maus bereits auf der Höhe $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ und muss zudem nur den Weg $\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ zurücklegen anstatt $\frac{k^2}{k^2-1}$ wie bei der Aufgabenvariante.
- Mehrere Löser rechnen aus, dass im Fall $k = 1$ die Katze, falls sie sich in $(x, y(x))$ befindet, von der Maus den Abstand $\frac{(1-x)^2+1}{2}$ hat. Dieser nähert sich im Rennverlauf dem Wert $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 1268 (Die einfache dritte Aufgabe). Ein Velofahrer überquert einen Pass (Bergfahrt, dann Scheiteltunnel, dann Talfahrt) von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ in 185 Minuten. Für die Gegenrichtung von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ benötigt er 225 Minuten. Aufwärts fährt er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16 km/h, abwärts mit 48 km/h, und den horizontalen Scheiteltunnel passiert er in beiden Richtungen mit v km/h.

Für welchen Wert von v lässt sich die Gesamtstrecke von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ berechnen, und wie gross ist sie dann? Welche Aussage lässt sich in diesem Fall über die Länge der drei Teilstrecken machen?

Hans Egli, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Alexander Boffinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Eine Zuschrift war nicht gezeichnet.

Die meisten Löser gehen vor wie *Dieter Koller*: Bezeichnen x, y und z die in Kilometer gemessenen Längen der Teilstrecken, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{x}{16} + \frac{y}{v} + \frac{z}{48} &= \frac{185}{60} && \text{für die Fahrt von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B}, \\ \frac{x}{48} + \frac{y}{v} + \frac{z}{16} &= \frac{225}{60} && \text{für die Fahrt von } \mathcal{B} \text{ nach } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen $x, y, z > 0$ erhält man die Lösungsschar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 16 \\ -\frac{v}{12}\lambda + \frac{49}{12}v \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ \frac{49v}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v}{12} \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $16 < \lambda < 49$ gelten muss.
Die Länge der Gesamtstrecke beträgt

$$x + y + z = \frac{49}{12}v - 16 + \lambda \cdot \left(2 - \frac{v}{12}\right).$$

Nur für $v = 24$ ist sie von λ unabhängig; es gilt dann

$$x + y + z = 82 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 16 \\ 98 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 16 < \lambda < 49.$$

Bemerkung der Redaktion: Die Geschwindigkeit $v = 24$ km/h, für welche sich die Gesamtstrecke eindeutig bestimmen lässt, ist das harmonische Mittel der beiden gegebenen Geschwindigkeiten 16 km/h und 48 km/h.