

---

---

## Gleichverteilung modulo Eins

---

---

Urs Stambach

### Einleitende Bemerkungen

Die frühe Geschichte der Gleichverteilung haben E. Hlawka und Ch. Binder in der interessanten Arbeit [9] dargestellt. Sie stellen darin fest, dass Hermann Weyls Arbeit [22] zu dessen wichtigsten Leistungen gehöre. Mit dieser Arbeit beginne eine neue Ära in der analytischen Zahlentheorie und in der Theorie der Diophantischen Ungleichungen und Gleichungen (siehe [9, S. 197 bzw. S. 222]).<sup>1</sup> In der Tat ist bemerkenswert, wie lebendig sich die Forschung auf der Grundlage von Weyls Arbeit in diesem Gebiet entwickelt hat.<sup>2</sup> Dabei hat sich auch gezeigt, dass die Eigenschaft der Gleichverteilung in erstaunlich vielen unterschiedlichen Gebieten eine wichtige Rolle spielt; entsprechende Fragestellungen gibt es in so weit voneinander entfernten Gebieten wie der klassischen und der modernen Zahlentheorie, der statistischen Mechanik, der Wahrscheinlichkeitstheorie<sup>3</sup> und der Theorie numerischer Integration. Dementsprechend zahlreich und weitgespannt sind auch die einschlägigen Veröffentlichungen. So enthält die Bibliographie des bereits 1974 erschienenen Buches *Uniform distribution of sequences* von L. Kuipers und H. Niederreiter [14] gegen 1000 Einträge. Heute wäre eine entsprechende Liste selbstverständlich noch erheblich länger.

---

<sup>1</sup>Die frühen Anwendungen in der Zahlentheorie kreisen i.a. um Abschätzungen der Summe der Exponentialfunktionen, wie sie im einfachsten Fall in der Gleichung (3) auftreten. Neuere zahlentheoretische Anwendungen betreffen oft Verallgemeinerungen der Gleichverteilung, z.B. die Gleichverteilung von Punkten in homogenen Räumen. Um einen Eindruck von der Intensität der Forschung in diesem Bereich zu erhalten, konsultiere man z.B. die Arbeit [4], das zugehörige Review und die dort zu findende eindrucksvolle Literaturliste.

<sup>2</sup>Weyl selbst hat sich in seinem weiteren Werk im wesentlichen nur noch als interessierter Zuschauer mit dem Thema beschäftigt.

<sup>3</sup>Der Zusammenhang seiner Überlegungen zur masstheoretischen Auffassung der Wahrscheinlichkeit, wie sie zwischen 1900 und 1910 von Borel [3] u.a. erstmals entwickelt wurde, war Weyl durchaus bewusst, wie verschiedene Bemerkungen in [22] belegen. Auf Grund der Umstände darf man annehmen, dass die in der (reinen) Mathematik wurzelnden Weylschen Arbeiten zur Gleichverteilung die in den folgenden Jahre stattfindende Entwicklung zu einer mathematisch fundierten Behandlung der Wahrscheinlichkeit stark beeinflusst haben. Diesen Zusammenhängen ist J. von Plato in seinem 1994 erschienenen Buch [16] eingehend nachgegangen. – Ich danke Norbert Schappacher für einen entsprechenden Hinweis.

Hermann Weyl hatte auf das Wintersemester 1913/14 hin die ordentliche Professur an der Eidgenössischen Technischen Hochschule angetreten. Seine die Gleichverteilung betreffenden Arbeiten [20], [21], [22] müssen demzufolge kurz nach seiner Übersiedlung nach Zürich fertig gestellt worden sein. Aus einer Bemerkung in der Arbeit [20] geht allerdings hervor, dass Weyl bereits 1909/10 begann, sich mit dem Themenkreis zu beschäftigen: er habe damals einen Beweis für den Satz 1 (siehe unten) gefunden. Es ist ferner anzunehmen, dass sich die Arbeit an der grösseren Veröffentlichung [22], die sicherlich als Zusammenfassung der bisherigen Resultate gedacht war, wegen des Ausbruchs des Ersten Weltkrieges im Herbst 1914 stark verzögert hat. Hermann Weyl wurde nämlich im Mai 1915 in den deutschen Heeresdienst eingezogen. Aus diesem Grunde konnte er seine bereits angekündigten Vorlesungen an der ETH nicht abhalten und musste für einen Teil des Sommersemesters 1915 sowie für das Wintersemester 1915/16 beim Schweizerischen Schulrat um Urlaub von der ETH nachsuchen. Dank mehrerer diplomatischer Interventionen der Schweiz direkt beim Ministerium in Berlin konnte Weyl seine Vorlesungstätigkeit im Sommersemester 1916 wieder aufnehmen. Schliesslich wurde er im August 1916 *zufolge wiederholter militärischer Untersuchungen vom Waffendienst bis auf weiteres* zurückgestellt (siehe [6, S. 20ff.]).

Weyl wurde erstmals auf den Themenkreis aufmerksam, als er 1909/10 im Zusammenhang mit einem speziellen Problem über Eigenwerte eine Aussage benötigte, die der später so genannten Gleichverteilung modulo 1 im zweidimensionalen Fall entsprach. Zur selben Zeit war P. Bohl [2] von einer astronomischen Fragestellung ausgehend auf das gleiche abstrakte Problem gestossen.<sup>4</sup> Ferner hatte W. Sierpiński [17], [18] um die selbe Zeit in der Zahlentheorie eng verwandte Fragen bearbeitet. Hermann Weyl erkannte offenbar rasch die wesentlichen gemeinsamen Grundlagen und entwickelte seine übergreifende Theorie. Unabhängig von Weyl haben Hardy und Littlewood gleichzeitig für Fragestellungen im Zusammenhang mit der  $\zeta$ -Funktion ähnliche Sätze bewiesen (siehe [10], [11] u.a., sowie [5]<sup>5</sup>). Es sind also drei völlig verschiedene Problemstellungen, die in der zentralen Weyl'schen Arbeit [22] über die Gleichverteilung von 1916 ihre Synthese gefunden haben.

**Dank.** Ein herzlicher Dank geht an Manfred Einsiedler für eine Reihe kritischer Hinweise und vor allem für eine ausgedehnte Privatvorlesung über neuere zahlentheoretische Arbeiten, die mit der Gleichverteilung in Zusammenhang stehen.

## Grundlagen

Das Problem der Gleichverteilung modulo Eins beschreibt Hermann Weyl zu Beginn der Arbeit [22] in seiner unnachahmlichen klaren Art wie folgt:

*Es seien auf der Geraden der reellen Zahlen unendlich viele Punkte*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

<sup>4</sup>Weyl geht in [21] auf die astronomische Fragestellung von Bohl ein; sie steht im Zusammenhang mit der Stabilität des Planetensystems.

<sup>5</sup>In [22] weist Weyl fälschlich auf „Herr[n] Towler, ein[en] Schüler der Herren Hardy und Littlewood“ hin. Man entnimmt [9], dass es sich dabei um R.H. Fowler handelt.

markiert; wir rollen die Gerade auf einen Kreis vom Umfange 1 auf und fragen, ob dabei die an den Stellen  $\alpha_n$  befindlichen Marken schliesslich den Umfang des Kreises überall gleich dicht bedecken. Dies würde dann der Fall sein, wenn die Anzahl  $n_\alpha$  derjenigen unter den  $n$  ersten Marken  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , welche beim Aufrollen in den Teilbogen  $\alpha$  der Kreisperipherie hineinfallen, asymptotisch durch  $|\alpha| \cdot n$  gegeben ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|; \quad (1)$$

unter  $|\alpha|$  ist dabei die Länge des Bogens  $\alpha$  verstanden. Dann und nur dann, falls diese Limesgleichung für jeden Teilbogen  $\alpha$  erfüllt ist, sprechen wir von einer gleichmässig dichten Verteilung der Marken über die Kreisperipherie. Das Aufrollen der Geraden auf den Kreis besagt, dass wir die reellen Zahlen mod. 1 betrachten, d.h. dass zwei Zahlen bereits dann als gleich gelten, wenn sie sich um eine ganze Zahl unterscheiden.

Wenn die Limesgleichung (1) für alle Teilintervalle  $\alpha$  erfüllt ist, nennt Weyl die Folge  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  gleichverteilt modulo 1; sie erfüllt das Gesetz der Gleichverteilung modulo 1. Die Terminologie wurde offenbar von Weyl eingeführt. Zwar liegt jede im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Folge in diesem Intervall auch dicht, aber die Umkehrung gilt nicht allgemein. Der hier neu definierte Begriff gleichmässig dicht, gleichverteilt beinhaltet eine wesentliche Verschärfung der bisher im Kroneckerschen Approximationssatz betrachteten Eigenschaft. Darüber hinaus ist der Zusammenhang mit dem Ergodensatz der statistischen Mechanik offensichtlich.

Hermann Weyl stellt anschliessend an seine Einleitung folgendes fest. Wenn die Zahlen  $\alpha_n$  modulo 1 das Gesetz der Gleichverteilung erfüllen, so gilt für jede beschränkte, Riemann integrierbare Funktion  $f(x)$ , die periodisch mit Periode 1 ist, die Limesgleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f(\alpha_h) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (2)$$

Mit anderen Worten: der mittels der diskreten Zahlen  $\alpha_h$  gebildete Mittelwert der Funktion  $f$  stimmt mit dem kontinuierlichen Mittelwert  $\int_0^1 f(x) dx$  überein.

Es folgt nämlich direkt aus der Definition der Gleichverteilung, dass die Gleichung (2) für stückweise konstante Funktionen erfüllt ist. Ferner kann man zu einer Riemann integrierbaren Funktion immer zwei stückweise konstante Funktionen  $f_1 \leq f \leq f_2$  so angeben, dass sich die Integrale  $\int_0^1 f_1(x) dx$  und  $\int_0^1 f_2(x) dx$  um beliebig wenig unterscheiden. Mit einigen formalen Zwischenschritten ergibt sich der Beweis.

Mit Hilfe dieser Überlegung lässt sich ein Kriterium für die Gleichverteilung modulo 1 einer Zahlfolge erhalten; es ist heute als *Weylsches Kriterium* bekannt.

Man betrachte die (komplexe) Exponentialfunktion, wobei wir zur Abkürzung

$$e(x) = e^{2\pi i x}$$

setzen. Damit ordnen wir der reellen Zahl  $x$  die komplexe Zahl  $e(x)$  vom Betrage eins zu, beschreiben also formelmässig nichts anderes als das „Aufrollen der Gerade auf einen

Kreis (in der komplexen Zahlenebene) mit Umfang 1<sup>6</sup>. Ist  $m$  eine ganze Zahl, so hat auch die Funktion  $e(mx)$  die gleiche Eigenschaft – das „Aufrollen“ geschieht einfach  $m$ -mal schneller. Wenn nun die Zahlfolge  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  das Gesetz der Gleichverteilung erfüllt, so folgt nach (2) für  $m \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(m\alpha_h) = \int_0^1 e(mx) dx = 0.$$

Aus der Theorie der Fourierreihen ergibt sich, dass sich jede periodische Funktion durch die Funktionen  $e(mx)$  linear zusammensetzen lässt. Dies erlaubt es, die Umkehrung des eben erhaltenen Resultates zu beweisen – dies ist das gewünschte *Kriterium*:

**Satz 1.** *Gilt für jede ganze Zahl  $m \neq 0$  die Limesgleichung*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(m\alpha_h) = 0, \quad (3)$$

*so genügen die Zahlen  $\alpha_h$  modulo 1 dem Gesetze der Gleichverteilung.*

Zum Beweis bemerkt man zuerst, dass die Gleichung (2) für die Funktion  $e(0x) = 1$  trivialerweise erfüllt ist. Mit der in Satz 1 gemachten Annahme folgt die Gleichung (2) somit für alle endlichen trigonometrischen Reihen (trigonometrischen Polynome). Insgesamt muss man nachweisen, dass die Gleichung (2) für jede stückweise konstante Funktion  $f$  der Periode 1 gültig ist. Zu diesem Zweck ändere man die Funktion  $f$  geringfügig ab, indem man sie an den Sprungstellen durch hinreichend steile geradlinige Böschungen ersetzt. Diese abgeänderte (stetige) Funktion lässt sich gemäss der Theorie der Fourierreihen, durch eine endliche trigonometrische Reihe  $r$  beliebig genau approximieren. Dies liefert eine beliebig kleine Differenz der Werte der Integrale über  $f$  und  $r$ . Mit einigen formellen Überlegungen lässt sich der Beweis vervollständigen.

In [9] wird mit Recht darauf hingewiesen, dass Weyl hier die Gleichverteilung einer Folge von reellen Zahlen durch ihr Verhalten gegenüber gewissen Klassen von Funktionen (Riemann integrierbare Funktionen bzw. Exponentialfunktionen) charakterisiert. Dies ist ein völlig neuer Gesichtspunkt: *Keiner seiner Vorgänger hat ähnlich gedacht* (siehe [9, S. 210]). Dieser bemerkenswerte Sichtwechsel ermöglicht insbesondere einfachere und durchsichtigere Beweise der zentralen Resultate.

Aus dem Kriterium von Satz 1 ergibt sich der fundamentale

**Satz 2.** *Ist  $\xi$  eine irrationale Zahl, so liegen die ganzzahligen Vielfachen von  $\xi$*

$$1\xi, 2\xi, 3\xi, \dots$$

*modulo 1 überall gleich dicht.*<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Die Aussage, dass die Verteilung dicht ist, entspricht dem (eindimensionalen) Approximationssatz von L. Kronecker. Weyl schreibt den Satz in der verschärften Form P. Bohl und W. Sierpiński zu, die 1909 bzw. 1910 unabhängig voneinander Beweise dafür angegeben hätten (siehe [2] und [17], [18]). Ein weiterer Beweis stamme von H. Bohr.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe von Satz 1. Für  $m \neq 0$  setzen wir  $m\xi = \eta$ . Dann lässt sich  $\sum_{h=1}^n e(h\eta)$  als (endliche) geometrische Reihe summieren. Es gilt

$$\left| \sum_{h=1}^n e(h\eta) \right| = \left| \frac{e((n+1)\eta) - e(\eta)}{e(\eta) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(\eta) - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi \eta|}.$$

Mit Satz 1 ergibt sich die Behauptung.

Neben der Folge der Vielfachen einer irrationalen Zahl hat Hermann Weyl in seiner Arbeit [22] von weiteren Folgen gezeigt, dass sie gleichverteilt modulo 1 sind. Als Beispiel erwähnen wir:<sup>7</sup>

**Satz 3.** *Es sei  $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ein reelles Polynom. Mindestens einer unter den Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sei irrational. Dann ist die Folge der Werte  $p(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , modulo 1 gleichverteilt.*

Inzwischen hat man für viele andere Folgen nachweisen können, dass sie modulo 1 gleichverteilt sind. Zahlentheoretisch interessant ist insbesondere das Resultat von Hlawka, welches besagt, dass die Folge der Imaginärteile der nichttrivialen Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion gleichverteilt ist (siehe [7]).

Zum Schluss dieses Abschnittes seien zwei Sätze erwähnt, die Einschränkungen für Mengen vom Mass 0 enthalten. Der erste dieser Sätze geht auf Weyl [22] zurück; Weyl leitet dort die entsprechenden Überlegungen wie folgt ein (siehe [22, S. 345]): *[Die] Ausnahmemenge enthält selbstverständlich alle rationalen Zahlen, es bleibt aber unentschieden, ob nicht etwa noch weitere Zahlen in ihr enthalten sind. Wenn ich nun freilich glaube, dass man den Wert solcher Sätze, in denen eine unbestimmte Ausnahmemenge vom Masse 0 auftritt, nicht eben hoch einschätzen darf, möchte ich diese Behauptung hier doch kurz begründen.*

**Satz 4.** *Es sei  $r \geq 2$  eine natürliche Zahl. Dann ist die Folge  $\alpha r^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , für fast alle reellen Zahlen  $\alpha$  gleichverteilt modulo 1.*

Dieser Satz erlaubt u.a. eine Anwendung auf die Dezimalbruchdarstellung (bzw.  $r$ -adische Darstellung) von reellen Zahlen (für Details konsultiere man [8, S. 74ff.]): *Für fast alle reellen Zahlen  $\alpha$  gilt, dass in der Dezimalbruchentwicklung (bzw.  $r$ -adischen) Entwicklung die Ziffern  $0, 1, 2, \dots, 9$  (bzw.  $0, 1, 2, \dots, r-1$ ) asymptotisch gleich oft auftreten.* Leider erlaubt dieses allgemeine Resultat aber keine Aussage zu konkret gegebenen reellen Zahlen wie etwa  $e$  oder  $\pi$ .

Ähnliches gilt für das folgende Resultat von J.F. Koksma (siehe [13]):

**Satz 5.** *Die Folge  $\alpha^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ist für fast alle  $\alpha$  gleichverteilt modulo 1.*

Seltsamerweise kennt man bis heute keinen einzigen expliziten Wert von  $\alpha$ , für den gezeigt werden kann, dass die Folge  $\alpha^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gleichverteilt ist. Insbesondere ist unbekannt, ob die Folgen  $e^n$  bzw.  $\pi^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , modulo 1 gleichverteilt sind.

<sup>7</sup>Wie Weyl in [22] bemerkt, haben G.H. Hardy und J.E. Littlewood fast gleichzeitig ein ähnliches Resultat erhalten (siehe [10], [11]).

## Höhere Dimensionen

Bereits Hermann Weyl hat seine eindimensionalen Resultate (Satz 1, Satz 2) auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Zu diesem Zweck werden Punkte

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$$

identifiziert, wenn entsprechende Koordinaten modulo 1 kongruent sind. Die so entstehende  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist das Toroid  $\mathbb{T}^p$ . Eine Folge von  $p$ -Tupeln  $\alpha(n)$  von reellen Zahlen

$$x_1 = \alpha_1(n), x_2 = \alpha_2(n), \dots, x_p = \alpha_p(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

heißt *gleichverteilt* in  $\mathbb{T}^p$ , wenn die Anzahl derjenigen unter den  $n$  ersten Punkte  $\alpha(n)$ , welche in einem beliebigen achsenparallelen Quader vom Volumen  $V$  liegen, asymptotisch durch  $V \cdot n$  gegeben ist.<sup>8</sup> Es gilt dann der

**Satz 6.** *Die Punktfolge ist in  $\mathbb{T}^p$  gleichverteilt, wenn für jedes System ganzer, nicht sämtlich verschwindender Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_p$  die Limesgleichung*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(m_1 \alpha_1(h) + m_2 \alpha_2(h) + \dots + m_p \alpha_p(h)) = 0$$

erfüllt ist.

Daraus ergibt sich wie oben die Folgerung

**Satz 7.** *Sind  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  irgend  $p$  reelle Zahlen, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht, so ist die Folge der Punkte*

$$(n\xi_1, n\xi_2, \dots, n\xi_p) \quad (4)$$

in  $\mathbb{T}^p$  gleichverteilt.

Die Tatsache, dass die Punkte (4) in  $\mathbb{T}^p$  überall dicht liegen, ist die Aussage des (mehr-dimensionalen) Kroneckerschen Approximationsatzes. Im Falle von zwei Dimensionen lässt sich die Aussage des Satzes 7 (mit wenigen offensichtlichen Abänderungen, die insbesondere die Ausdehnung des Resultates auf eine kontinuierliche geradlinige Bewegung konstanter Geschwindigkeit betreffen) als Aussage über das Billard im Einheitsquadrat interpretieren (siehe [22]). Man starte die Billardkugel im Nullpunkt in einer Richtung, deren Tangens irrational ist. Dann kommt die Bahn der Billardkugel nicht nur jedem Punkt des Einheitsquadrates beliebig nahe, sondern die Kugel verweilt in Teilbereichen gleichen Flächeninhaltes auch gleich lang. Mit Blick auf den Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und der statistischen Mechanik stellt Weyl explizit fest, dass auf der Bahn der Kugel *die relative Verweilzeit gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit ist. Die Beziehung zur statistischen Mechanik ist einleuchtend.* (Siehe [22, S. 319].)

<sup>8</sup>Statt eines Quaders kann ein beliebig abgegrenztes Raumstück genommen werden, das im Jordanschen Sinn ein Volumen besitzt (siehe [22, S. 318]).

## Integrale

Die Limesgleichung (2), welche die Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall definiert, kann auf zwei verschiedene Arten Informationen liefern. Einmal kann sie dazu verwendet werden, die links stehende Summe durch das rechts stehende Integral abzuschätzen; dies bietet sich besonders in den Fällen an, in denen das Integral einfacher zu handhaben ist als die Summe. In dieser Richtung gibt es zahlreiche zahlentheoretische Anwendungen. Die Limesgleichung kann umgekehrt aber auch dazu benützt werden, um das rechts stehende Integral numerisch, also durch eine Summe auszuwerten. In diesem Fall ist es wichtig, eine Fehlerabschätzung zur Verfügung zu haben. Dieses Problem wurde nach Weyl von verschiedenen Autoren angegangen (für einen Überblick siehe [14, Section 2.4]). Es liegt auf der Hand, dass sich eine solche Fehlerabschätzung auf zwei Elemente abstützen wird. Einmal werden darin Eigenschaften der Funktion  $f$  eine Rolle spielen, dann wird aber auch die „Qualität“ der benützten gleichverteilten Folge in die Abschätzung eingehen. Letzteres wird mit der sogenannten *Diskrepanz* gemessen, welche beschreibt, wie gleichmässig die Verteilung der Folgenglieder in den verschiedenen Teilbereichen von  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{T}^p$  stattfindet.

Bei genauerem Hinsehen zeigte es sich, dass der Begriff der Diskrepanz auch auf nicht gleichverteilte Folgen angewendet werden kann und dass sich aus dieser Überlegung vielfältige praktisch durchführbare Methoden der numerischen Integration ergeben; entsprechende Stichworte sind Quasi-Monte Carlo Methoden und Gitter Methoden (lattice methods). Dies kommt insbesondere im Falle von mehrdimensionalen Integralen zum Tragen, wo die numerische Integration ein weit schwierigeres Unterfangen ist als im eindimensionalen Fall. In diesem Bereich haben E. Hlawka, J.F. Koksma u.a. attraktive Resultate erhalten, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden kann (für weitere Informationen vergleiche man [8], [14]). Weiterentwicklungen dieser Methode scheinen sich bei der Berechnung von sehr hochdimensionalen Integralen, wie sie in neueren Anwendungen der Physik und Finanzwissenschaft vorkommen, gut zu eignen (siehe dazu z.B. [19] und die dort angegebene Literatur).

## Gesetz von Benford für 2-er Potenzen

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich noch mit einer Anwendung der Gleichverteilung auf ein Problem, das auch in Kreisen ausserhalb der Mathematik Aufmerksamkeit erlangt hat. Frank Benford (1883–1948) hat 1938 (siehe [1]) das (oft nach ihm benannte) „Gesetz“ ausgesprochen, welches besagt, dass in Datenmengen die Zahlen mit der führenden Ziffer 1 generell häufiger vorkommen als diejenigen mit anderen führenden Ziffern. Benford hat damit eine Vermutung ausgesprochen, die vor ihm Simon Newcomb bereits 1880 formuliert hatte (siehe [15]); man spricht deshalb neuerdings auch etwa vom *Newcomb-Benford-Gesetz*. Newcomb hatte bemerkt, dass in Logarithmentafeln die ersten Seiten jeweils stärker abgegriffen waren als die anderen. Da diese ersten Seiten in solchen Tafeln in der Regel zu Zahlen gehören, die mit einer Eins beginnen, schloss Newcomb daraus, dass solche Zahlen häufiger vorkommen als die anderen. Er konnte allerdings dafür keine Gründe angeben.

Das Gesetz blieb auch nach Benford während längerer Zeit wenig bekannt; erst vor einigen Jahren hat man sich wieder ernsthaft damit beschäftigt. Für viele mathematisch de-

finierte Mengen von ganzen Zahlen hat man das Benfordsche Gesetz inzwischen streng nachweisen können (siehe [12] für einen Überblick). Man hat ferner auch versucht, es zur Enttarnung von Fälschungen einzusetzen, indem man nachkontrollierte, ob Messresultate bzw. die Zahlen in Geschäftsbilanzen und Steuererklärungen dem Benfordschen Gesetz genügen (siehe dazu [12]).

Hier soll gezeigt werden, dass sich das Benfordsche Gesetz für die Menge der 2-er Potenzen leicht aus dem obigen Satz 2 der Gleichverteilung modulo 1 ergibt. Es ergibt sich daraus sogar eine qualitative Wahrscheinlichkeitsaussage, die sich ferner in offensichtlicher Weise verallgemeinern lässt.

**Satz 8.** *Die Wahrscheinlichkeit, dass die führende Ziffer einer 2-er Potenz eine Eins ist, beträgt  $\log_{10} 2 \approx 0.30$ .*

Die 2-er Potenz  $2^q$  beginnt mit einer Eins, wenn

$$2^q = 10^p \cdot 1.*$$

gilt, wobei  $1.*$  einen (endlichen) Dezimalbruch im Intervall  $[1, 2)$  bezeichnet. Durch Logarithmieren erhält man

$$\log_{10} 2^q = p + \log_{10} 1.*$$

Daraus ergibt sich, dass die 2-er Potenz  $2^q$  genau dann mit einer 1 beginnt, wenn der Nachkommaanteil von  $\log_{10} 2^q$  zwischen  $0 = \log_{10} 1$  und  $\log_{10} 2$  liegt. Nun gilt aber

$$\log_{10} 2^q = q \cdot \log_{10} 2.$$

Da schliesslich  $\log_{10} 2$  irrational ist (siehe unten), ist gemäss Satz 2 die Folge der Zahlen  $q \cdot \log_{10} 2$  modulo 1 gleichverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Nachkommaanteil in ein vorgegebenes Teilintervall von  $[0, 1]$  fällt, entspricht also der Länge des Intervalles. Es ergibt sich, dass die führende Ziffer der 2-er Potenz  $2^q$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\log_{10} 2$  eine 1 ist.

Es bleibt nachzuweisen, dass  $\log_{10} 2$  irrational ist. Wäre  $\log_{10} 2$  rational,  $\log_{10} 2 = m/n$  für  $m, n$  ganz, so hätte man

$$10^{\frac{m}{n}} = 2, \quad \text{also} \quad 10^m = 2^m \cdot 5^m = 2^n.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Wir erwähnen zum Schluss, dass sich die Aussage von Satz 8 in offensichtlicher Weise verallgemeinern lässt: statt 2-er Potenzen kann man viele andere Potenzen in ähnlicher Weise behandeln. Ferner kann das Resultat auch auf andere führende Ziffern, ja sogar auf Ziffern-Paare, -Tripel etc. ausgedehnt werden. Die Durchführung der notwendigen Überlegungen überlassen wir dem Leser, der Leserin.

## Literatur

- [1] Benford, F.: The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc.* 78 (1938), 551–572.
- [2] Bohl, P.: Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. *J. für Math.* 135 (1909), 189–283.

- [3] Borel, E.: *Éléments de la théorie des probabilités*. Hermann, Paris 1909.
- [4] Eskin, A.; Margulis, G.; Mozes, S.: Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of the Oppenheim conjecture. *Ann. of Math. (2)* 147 (1998), 93–141.
- [5] Fowler, R.H.: On the distribution of the sets of points  $(\lambda_n\theta)$ . *Proc. London Math. Soc. (2)* 4 (1915), 189–206.
- [6] Frei, G.; Stammbach, U.: *Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH 1913–1930*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [7] Hlawka, E.: Über die Gleichverteilung gewisser Folgen, die mit den Nullstellen der Zetafunktion zusammenhängen. *Österreich Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* 184 (1975), 459–471.
- [8] Hlawka, E.: *Theorie der Gleichverteilung*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1979.
- [9] Hlawka, E.; Binder, Ch.: Über die Entwicklung der Theorie der Gleichverteilung in den Jahren 1909 bis 1916. *Arch. Hist. Exact Sci.* 36 (1986), 197–249.
- [10] Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.: Some problems of diophantine approximations. Proc. of the 5th Intern. Congress of Mathematicians, 223–229. Cambridge University Press, 1913.
- [11] Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.: Some problems of diophantine approximations: The fractional part of  $n^k\theta$ . *Acta Math.* 37 (1914), 155–191.
- [12] Jolissaint, P.: Loi de Benford, relations de récurrence et suites équidistribuées. *Elem. Math.* 60 (2005), 10–18.
- [13] Koksma, J.F.: Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. *Compositio Math.* 2 (1935), 250–258.
- [14] Kuipers, L.; Niederreiter, H.: *Uniform Distribution of Sequences*. Wiley, New York 1974.
- [15] Newcomb, S.: Note on the frequency of the use of different digits in natural numbers. *Amer. J. Math.* 4 (1881), 39–40.
- [16] Plato, J. von: *Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*. Cambridge University Press, 1994.
- [17] Sierpiński, W.: Un théorème sur les nombres irrationnels. *Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie A* (1909), 725–727. In: [9], 241–243.
- [18] Sierpiński, W.: Sur la valeur asymptotique d’une certaine somme. *Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie A* (1910), 9–11. In: [9], 244–245.
- [19] Sloan, I.; Joe, S.: *Lattice Methods for Multiple Integrals*. Clarendon Press, Oxford 1994.
- [20] Weyl, H.: Über ein Problem aus dem Gebiet der diophantischen Approximationen. *Nachr. Königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1914), 234–244. In: Ges. Abh. I, 487–497. (Sitzung vom 13. Juni 1914.)
- [21] Weyl, H.: Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et la théorie des perturbations. *Enseign. Math.* 16 (1914), 455–467. In: Ges. Abh. I, 498–510. (Basiert auf einem Vortrag vom 9. Mai 1914 anlässlich der Versammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft in Zürich. „Rédaction française de M. Ch. Willigens.“)
- [22] Weyl, H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.* 77 (1916), 313–352. In: Selecta, 111–147 sowie Ges. Abh. I, 563–599.

Urs Stammbach  
Departement Mathematik  
ETH-Zentrum  
CH-8092 Zürich, Schweiz  
e-mail: stamm@math.ethz.ch