
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2011 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Momentan herrscht ein gewisser Mangel an einfachen dritten Aufgaben. Aufgabenvorschläge können ebenfalls über obenstehende Adresse eingesandt werden.

Aufgabe 1290: Seien a, b, c reelle nichtnegative Zahlen mit $a + b + c = 1$. Zeige, dass dann

$$0 \leq 4(ab + bc + ca) - 9abc \leq 1$$

gilt.

Michael Vowe, Therwil, CH

Aufgabe 1291: Von einem Viereck $ABCD$ seien die Seiten $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ sowie der Diagonalenwinkel ε , der der Seite a gegenüberliegt, vorgegeben. Man konstruiere das Viereck.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Aufgabe 1292 (Die einfache dritte Aufgabe): Bei welchen zwei Rechtecken mit gleichem Umfang und ganzzahligen Seitenlängen ist der Flächeninhalt des einen die Hälfte des anderen?

Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2010

Aufgabe 1278. Für $1 \leq j, k \leq 9$ sei $s(j, k)$ die Zahl, welche in einem Sudoku in der Zeile j und der Spalte k steht.

Man gebe eine möglichst kurze Formel an, welche

- ein vollständiges Sudoku definiert.
- ein vollständiges Pansudoku definiert, also ein Sudoku, bei welchem auch in den beiden Diagonalen jede Ziffer 1, 2, ..., 9 genau einmal steht.

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von 7 Lesern sind Beiträge eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Diese Aufgabe wurde nicht von allen Lesern richtig verstanden. Nur *Hans Brandstetter* zu a) und *Walter Burgherr* zu a) und b) haben Lösungen im Sinne des Verfassers eingereicht.

Die einfachste Möglichkeit ein Sudoku zu generieren besteht darin, dass man in der ersten Zeile die Zahlen 1 bis 9 in beliebiger Weise aufschreibt. Die zweite und dritte Zeile entstehen aus der ersten durch Verschieben von drei bzw. sechs Stellen. Der zweite (Zeilen vier bis sechs) und der dritte Block (Zeilen sieben bis neun) entstehen aus den ersten drei Zeilen durch verschieben von einer bzw. zwei Stellen nach links oder rechts.

Die oben genannten Leser konnten ein solches Sudoku mit folgender (oder dazu äquivalenter) Formel beschreiben:

$$s(j, k) = \left(3j + k \pm \left\lfloor \frac{j-1}{3} \right\rfloor + 5 \right) \bmod 9 + 1.$$

Walter Burgherr fand die Formel

$$s(j, k) = \left(3j + k - 2 \left\lfloor \frac{j-1}{3} \right\rfloor - 3 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{j-1}{3} \right\rfloor + ((k-1) \bmod 3)}{3} \right\rfloor + 5 \right) \bmod 9 + 1,$$

mit der ein vollständiges Pansudoku generiert werden kann.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	2	3	1	5	6	4
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5
3	1	2	6	4	5	9	7	8

Aufgabe 1279. Mit Elementen aus dem Alphabet $A = \{1, 2, \dots, m\}$ bilde man n -stellige Sequenzen, die keine Dreierblöcke xyx ($y \neq x$, $x, y \in A$) enthalten. Man bestimme deren Anzahl a_n sowohl rekursiv als auch als Funktion von n .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 8 Löser haben Zuschriften eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die folgende Lösung setzt sich aus den Beiträgen von *Fritz Siegerist* und *Henri Carnal* zusammen. Allerdings gingen fast alle Löser in gleicher Weise vor.

Die letzten drei Einträge der zu a_n zu zählenden Sequenzen seien xyz . Lässt man den letzten Eintrag z fort, so sind es deren a_{n-1} , und davon enden a_{n-2} der $(n-1)$ -stellige Sequenzen auf xx , also mit $x = y$. Für z sind zunächst alle Werte mit $z \neq x$ zulässig, also deren $m-1$, was $(m-1)a_{n-1}$ n -stellige Sequenzen ergibt. Allerdings sind dann jene, die auf xxx enden (also $z = x$ haben), noch nicht berücksichtigt. Das sind a_{n-2} weitere n -stellige Sequenzen. Die Summe der beiden Ergebnisse ist die gesuchte Rekursionsformel für a_n :

$$a_n = (m-1)a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2) \quad a_1 = m, \quad a_2 = m^2.$$

Die Rekursionsformel bleibt für $n = 2$ gültig, wenn man $a_0 = m$ setzt.

Die Umwandlung der linearen Rekursionsformel in die explizite exponentielle Formel ist eine bekannte Rechnung: Sind $u_{\pm} = \frac{1}{2}(m-1 \pm \sqrt{m^2-2m+5})$ die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = (m-1)x + 1$ und α_+ , α_- die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha_+ + \alpha_- &= a_0 = m, \\ \alpha_+ u_+ + \alpha_- u_- &= a_1 = m, \end{aligned}$$

so gilt $\alpha_{\pm} = \frac{m}{2} \mp \frac{m(m-3)}{2\sqrt{m^2-2m+5}}$ und

$$a_n = \alpha_+ u_+^n + \alpha_- u_-^n = \frac{m}{2}(u_+^n + u_-^n) - \frac{m(m-3)}{2\sqrt{m^2-2m+5}}(u_+^n - u_-^n).$$

Beispiel: Für $m = 2$ lautet die Rekursionsformel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ und man erhält bis auf einen Faktor 2 die Fibonaccizahlen $a_n = 2F_n$.

Aufgabe 1280 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Felder eines 5×5 -Quadrates sollen so mit den Ziffern 1 bis 5 belegt werden, dass jede Ziffer in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau einmal vorkommt. Auf wieviele Arten ist dies möglich? (5-er Pansudoku)

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH),

Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser sind ähnlich wie *Fritz Siegerist* vorgegangen, dessen Lösung hier präsentiert wird.

Die Hauptdiagonale kann $5!$ mal belegt werden (Faktor 120). Wir wählen „12345“ und betrachten die Nebendiagonale. Sie hat „2“ und „4“ in den Ecken und kann an der Hauptdiagonalen gespiegelt werden (Faktor 2). Die Nebendiagonale muss dann „21354“ oder „25314“ sein (Faktor 2). In der Mitte zwischen den Ecken „1“ und „2“ muss „4“ oder „5“ platziert werden (Faktor 2). Da die restlichen 15 Felder (wie ein Vorgehen nach Sudokuart klärt) bei jedem dieser $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Schemata genau eine Belegung gestatten, ergeben sich $120 \cdot 8 = 960$ Belegungen.

1				4
	2			
		3		
			4	
2				5

1				2
	2			
		3		
			4	
4				5

1				4
	2			
		3		
			4	
2	1			5

1				4
	2			
		3		
			4	
2				5

1				4
	2			
		3		
			4	
2				5

1				4
	2			
		3		
			4	
2				5

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
4	5	3	1	2
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

Aufgabe 1195A aus Heft 2, 2003. Die 81 verschiedenen Karten eines (im Handel erhältlichen) Kartenspiels unterscheiden sich in vier Merkmalen:

- Anzahl der aufgedruckten gleichartigen Symbole: jeweils 1, 2 oder 3 Stück,
- Farbe der aufgedruckten Symbole: alle rot oder violett oder türkis,
- Form der aufgedruckten Symbole: alle sind oval oder wellenförmig oder balkenartig,
- Füllung der aufgedruckten Symbole: alle sind leer oder gefüllt oder schraffiert.

Eine Auswahl von drei Karten heisst ein „Set“, wenn für jedes der vier Merkmale gilt, dass die drei Karten in diesem Merkmal vollständig übereinstimmen oder dass keinerlei Übereinstimmung in diesem Merkmal besteht. Beispielsweise bilden die drei Karten mit 3 roten schraffierten Wellen, 2 roten vollen Wellen und 1 roten leeren Welle ein „Set“. Hingegen bilden die drei Karten mit 3 violetten leeren Balken, 3 türkisfarbenen leeren Balken und 3 roten vollen Balken kein „Set“.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter $n = 12$ zufällig gewählten Karten mindestens ein „Set“ befindet?
- b) Für welche kleinste Anzahl Karten n ist diese Wahrscheinlichkeit 1?

Ludger Weber, Lausanne, CH und Jon Florin, Chur, CH

Der Autor *Jon Florin* macht darauf aufmerksam, dass Teil b) der Aufgabe schon lange gelöst wurde, die Antwort lautet $n = 21$. Ein zu dieser Aufgabe äquivalentes Problem, nämlich eine maximale Menge in \mathbb{F}_3^4 anzugeben, die keine Gerade enthält, wurde von *Giuseppe Pellegrino* (G. Pellegrino: Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$. *Matematiche (Catania)*, 25:149–157) schon 1971 gelöst. Einen Artikel dazu von *Benjamin Lent Davis* und *Diane MacLagan* findet man auch in den Links zum englischsprachigen Wikipedia-Artikel (http://en.wikipedia.org/wiki/Set_game).

Der Teil a) der Aufgabe bleibt weiterhin offen.