Elem. Math. 66 (2011) 175 – 178
0013-6018/11/040175-4
DOI 10.4171/EM/186

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2012 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1296: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Beweise, dass

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\sqrt{\tanh(a_k)}\right) < 1-\sqrt{\tanh\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)}.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1297: Wohl nur im Verkehrsstau kommt man auf die Idee bei der Nummer des voranstehenden Autos die Quersumme auszurechnen und zu schauen, ob diese gerade durch die vorderste und hinterste Ziffer (als Zahl gelesen) der Autonummer angezeigt wird.

Wie gross ist die relative Häufigkeit dieses Ereignisses bei sechsstelligen Autonummern?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1298 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei ABC ein Dreieck und sei A' (resp. B', C') auf der zu A (resp. B, C) gegenüberliegenden Seite des Dreieck so, dass sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt P schneiden. Beweise, dass die Dreiecke $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ genau dann denselben Flächeninhalt haben, wenn P der Schwerpunkt des Dreiecks ist.

Sadi Abu-Saymeh und Mowaffaq Hajja, Irbid, JOR

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2010

Aufgabe 1284. Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die folgende Identität gilt:

$$\sum_{\text{zyklisch}} \left(\sin^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\right) + \prod_{\text{zyklisch}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von 18 Lesern eingetroffen: Georghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (München, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungsvorschläge lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Entweder werden trigonometrische Identitäten verwendet oder die Winkel werden mit bekannten Formeln im Dreieck eliminiert. Wir folgen der Lösung von *Albert Stadler*, dessen Beitrag der ersten Kategorie zuzurechnen ist.

Wir verwenden die Darstellung $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ für die Sinusfunktion und multiplizieren aus. Es entsteht

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{zykl.}} \left(\sin^3\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\beta-\gamma}{2}\right)\right) + \prod_{\text{zykl.}} \sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \cos\left(\tfrac{3\alpha+\beta-\gamma}{2}\right) - \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \cos\left(\tfrac{3\alpha-\beta+\gamma}{2}\right) - \frac{1}{4}\sum_{\text{zykl.}} \sin(\alpha-\beta)\\
&= \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \cos\left(\alpha-\gamma+\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\\
&\quad - \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \cos\left(\alpha-\beta+\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) - \frac{1}{4}\sum_{\text{zykl.}} \sin(\alpha-\beta)\\
&= \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \sin(\gamma-\alpha) + \frac{1}{8}\sum_{\text{zykl.}} \sin(\alpha-\beta) - \frac{1}{4}\sum_{\text{zykl.}} \sin(\alpha-\beta)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

wo wir die Tatsache verwendet haben, dass in einem Dreieck $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ gilt, und dass $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) = \sin(-x)$ ist.

Aufgabe 1285. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und (a, b) der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen a und b. Welche der Zahlen R_n, S_n und T_n $(n \geq 2)$

definiert durch

$$R_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\le n}} (a^2+b^2) \qquad S_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\le n\\ (a,b)=1}} (a^2+b^2) \qquad T_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\le n\\ (a,b)=1\\ a\le b}} (a^2+b^2)$$

sind Quadratzahlen?

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Zur vollständigen Lösung sind der Zwei-Quadrate-Satz von *Fermat* und eine Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulats nötig. Die meisten Lösungen sind weitgehend mit derjenigen von *Peter Bundschuh* identisch.

Weil in S_n, mit Ausnahme der $2 = 1^2 + 1^2$, jeder Faktor doppelt vorkommt, gilt zunächst für jedes natürliche $n \geq 2$

$$2S_n = \prod_{\substack{a^2+b^2\le n\\ (a,b)=1,\ a\le b}} (a^2+b^2)^2 = T_n^2.$$

Somit ist kein S_n ein Quadrat.

Zur Untersuchung von R_n definieren wir

$$Q_n = \prod_{\substack{a^2+b^2\le n\\ a\le b}} (a^2+b^2),$$

woraus man unmittelbar erkennt, dass

$$Q_n^2 = R_n \prod_{1\le a\le\sqrt{n/2}} (2a^2).$$

Daraus liest man ab, dass R_n genau dann ein Quadrat ist, wenn $2^{\lfloor\sqrt{n/2}\rfloor}$ ein Quadrat ist, d.h. wenn $\lfloor\sqrt{n/2}\rfloor = 2t_n$ eine gerade Zahl ist. R_n ist also genau dann ein Quadrat, wenn gilt

$$n \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \{8t^2, 8t^2+1, \ldots, 8t^2+8t+1\}.$$

Um schliesslich nachzuweisen, dass T_n genau für $n \in \{10, 11, 12\}$ ein Quadrat ist, rechnen wir zuerst $T_n = 2$ für $n \in \{2, 3, 4\}$, $T_n = 10$ für $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $T_n = 100$ für $n \in \{10, 11, 12\}$, sowie $T_{13} = 1300$ direkt nach. Für die $n \geq 14$ verwenden wir folgendes von *Robert Breusch* (Breusch, R.: Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulats, dass zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen. *Math. Z.* 34 (1932), 505–526) gefundene Analogon zum Bertrandschen Postulat: *Für jedes reelle* $x \geq 7$ *gibt es eine Primzahl* $p \equiv 1 \pmod 4$ *mit* $x < p \leq 2x$.

Hat man nun eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 14$, so existiert eine Primzahl $p_n \equiv 1 \pmod 4$ mit $n/2 < p_n \leq n$. Dieses p_n besitzt bekanntlich eine eindeutige Darstellung der Form $p_n = a_n^2 + b_n^2$ mit teilerfremden $a_n \leq b_n$, geht also ins Produkt T_n ein. Wegen $n/2 < p_n$ tritt p_n nur in erster Potenz auf, weshalb T_n kein Quadrat sein kann.

Aufgabe 1286 (Die einfache dritte Aufgabe). In der Ebene seien 4 verschiedene Punkte durch ihre kartesischen Koordinaten gegeben. Gesucht ist ein Quadrat so, dass auf jeder Seite oder deren Verlängerung einer der gegebenen Punkte liegt. Man berechne die Steigung einer Quadratseite aus den Koordinaten der gegebenen Punkte und diskutiere die Lösung.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingetroffen: Georghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (München, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wie von verschiedenen Lösern bemerkt, wurden mit der Behandlung dieses Problems von *Paul Buchner* die *Elemente der Mathematik* eröffnet. Wir folgen der leicht bearbeiteten Lösung von *Walter Burgherr*.

Die vier Punkte werden durch die Koordinaten $P_i(x_i, y_i)$ für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ beschrieben. Es sollen nun die Punkte P_0 und P_k ($k \in \{1, 2, 3\}$) auf gegenüber liegende, parallele Seitengeraden zu liegen kommen. Dann verbindet der Vektor $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0 P_k}$ die einen Parallelen und der Vektor $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_{k+1} P_{k+2}}$ die beiden anderen Parallelen (wobei $P_4 = P_1$, $P_5 = P_2$). Dreht man $\vec{v}_2$ um $\pm 90°$, so ergibt sich ein Vektor $\vec{v}_2^{\perp}$, der ebenfalls das erste Parallelenpaar verbindet. Mit $\vec{v} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2^{\perp}$ ergibt sich dann ein Richtungsvektor, der eine Seitengerade festlegt. Aus den Angaben gewinnt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 - x_k \pm (y_{k+1} - y_{k+2}) \\ y_0 - y_k \mp (x_{k+1} - x_{k+2}) \end{pmatrix}$$

und die Steigung der Parallelen durch P_0

$$m = \frac{y_0 - y_k \mp (x_{k+1} - x_{k+2})}{x_0 - x_k \pm (y_{k+1} - y_{k+2})}.$$

Im Allgemeinen gibt es wegen $k \in \{1, 2, 3\}$ und den beiden Orientierungen für $\vec{v}_2^{\perp}$ sechs Lösungen.

Sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2^{\perp}$ kollinear aber verschieden, so kollabiert das Quadrat zu einem Punkt. Ist $\vec{v}_2^{\perp} = \vec{v}_1$ und somit $\vec{v} = \vec{0}$, so kann die Gerade beliebige Steigung haben. Es resultieren unendlich viele Lösungen.