Elem. Math. 67 (2012) 39 – 43
0013-6018/12/010039-5
DOI 10.4171/EM/191

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2012 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1299: Seien a, b, c und a', b', c' zueinander duale Basen des $\mathbb{R}^3$. Es gilt also $a \circ a' = 1$, $a \circ b' = 0$, $a \circ c' = 0$, etc. Dabei bezeichnet $\circ$ das übliche Skalarprodukt. Man beweise, dass die folgenden Gleichungen paarweise äquivalent sind:

(i) $a' \circ b' = 0$,

(ii) $(a \circ c)(b \circ c) = (a \circ b)(c \circ c)$,

(iii) $a' \circ a' = \dfrac{c \circ c}{(a \circ a)(c \circ c) - (a \circ c)^2}$.

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Aufgabe 1300: Vier punktförmige Käfer A, B, C bzw. D sitzen je in einer Ecke eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge 1. Sie laufen gleichzeitig und mit derselben konstanten Geschwindigkeit los, indem sie

a) im Raum
b) auf der Tetraederoberfläche

stets die Richtung des jeweils kürzesten Weges zum Käfer B, C, D bzw. A beibehalten. Gesucht sind (ohne Zeitparameter) die Bahngleichungen bezüglich eines je geeigneten Koordinatensystems, bei b) in der Abwicklung.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Aufgabe 1301 (Die einfache dritte Aufgabe): Gegeben sei ein 3×3 magisches Quadrat aus natürlichen Zahlen, nicht notwendig verschieden. Man zeige, dass 3 die einzig mögliche magische Zahl ist, die auch Primzahl ist.

Dietrich Trenkler, Osnabrück, D und Götz Trenkler, Dortmund, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2011

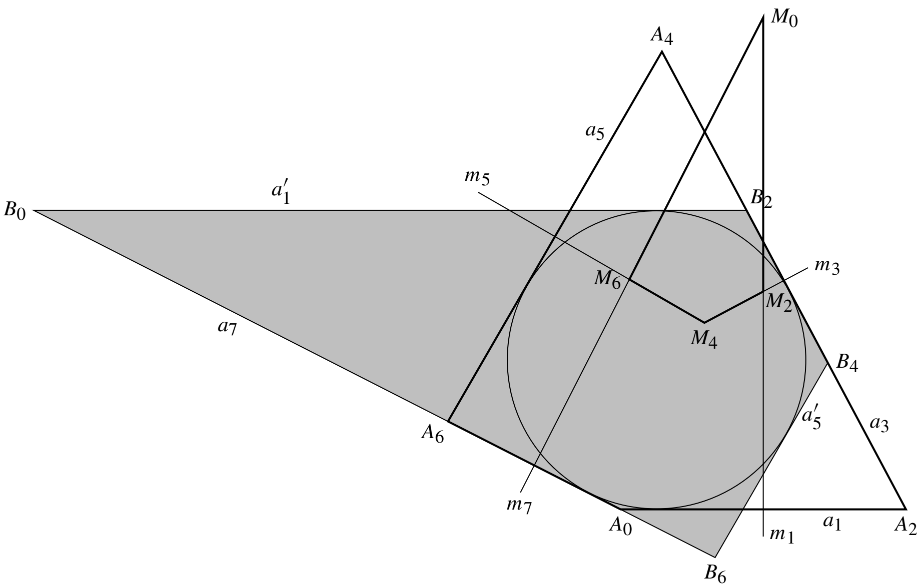
Aufgabe 1287. In einem Tangentenviereck errichtet man die Mittelsenkrechten der vier Seiten. Man beweise vorzugsweise geometrisch, dass das von den Mittelsenkrechten gebildete Viereck wieder ein Tangentenviereck ist.

Peter Gallin, Bauma, CH und Daniel Stoffer, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 9 Lesern eingegangen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (München, D).

Die meisten Löser zeigen, dass das von den Mittelsenkrechten gebildete Viereck ähnlich ist zu einem von vornherein feststehenden Tangentenviereck. Wir folgen der Lösung von *Christian Blatter*.

Es sei A ein konvexes Viereck mit Inkreis K und aufeinanderfolgenden Ecken A_0, A_2, A_4, A_6 (alle Indizes sind mod 8 zu verstehen). Weiter seien $a_i = A_{i-1} \vee A_{i+1}$ $(i = 1, 3, 5, 7)$ die den Kreis K berührenden Seitengeraden von A und schliesslich m_i $(i = 1, 3, 5, 7)$ die Mittelsenkrechten der Strecken $[A_{i-1}, A_{i+1}]$. Besitzt A auch einen Umkreis, so gehen alle m_i durch dessen Mittelpunkt, und es gibt nichts zu beweisen. Andernfalls, was wir nun voraussetzen wollen, schneiden sich höchstens zwei der m_i im gleichen Punkt, und man kann davon ausgehen, dass die vier Punkte $M_i = m_{i-1} \wedge m_{i+1}$ $(i = 0, 2, 4, 6)$ in allgemeiner Lage sind. Das von den Seitengeraden m_i gebildete Viereck bezeichnen wir mit M und verweisen auf die folgende Figur.



Der Punkt M_0 ist gleich weit entfernt von A_6 und A_2, und dasselbe trifft zu für den Punkt M_4. Die Diagonale $M_0 \vee M_4$ von M ist daher die Mittelsenkrechte der Diagonalen $[A_2, A_6]$ des Ausgangsvierecks A, und in analoger Weise ist die Diagonale $M_2 \vee M_6$ von M die Mittelsenkrechte der Diagonalen $[A_0, A_4]$ von A.

Wir spiegeln nun die Tangenten a_1 und a_5 am Mittelpunkt des Kreises K und erhalten zwei neue Tangenten a_1', a_5'. Die sinngemäss nummerierten Schnittpunkte B_i dieser neuen Tangenten mit den verbliebenen Tangenten a_3 und a_7 bilden die Ecken eines neuen Tangentenvierecks B. Wir behaupten: Das Viereck M ist ähnlich zu B und somit in der Tat ein Tangentenviereck.

Als erstes zeigen wir, dass die Diagonale $B_0 \vee B_4$ von B parallel ist zur Diagonalen $A_2 \vee A_6$ von A. Hierzu betrachten wir das Sextupel $(a_1, a_1', a_7, a_5, a_5', a_3)$ von Tangenten an den Kegelschnitt K. Die Schnittpunkte $a_1' \wedge a_1$ und $a_5 \wedge a_5'$ liegen im Unendlichen, somit ist deren Verbindungsgerade die unendlichferne Gerade g_∞. Die Verbindungsgeraden $(a_1' \wedge a_7) \vee (a_5' \wedge a_3) = B_0 \vee B_4$ und $(a_7 \wedge a_5) \vee (a_3 \wedge a_1) = A_6 \vee A_2$ treffen sich nach dem Satz von Brianchon mit g_∞ in einem Punkt; sie müssen daher parallel sein. Analog zeigt man, dass die Diagonale $B_2 \vee B_6$ von B parallel ist zur Diagonalen $A_0 \vee A_4$ von A. Es folgt, dass $M_0 \vee M_4$ auch senkrecht steht auf $B_0 \vee B_4$ und $M_2 \vee M_6$ auch senkrecht auf $B_2 \vee B_6$.

Hieraus ergibt sich, dass jedes der vier Dreiecke $\triangle_i^M = \triangle M_{i-2} M_i M_{i+2}$ ähnlich ist zu dem entsprechenden Dreieck $\triangle_i^B = \triangle B_{i-2} B_i B_{i+2}$, und zwar unter Erhaltung der Orientierung. Um etwa $\triangle M_0 M_2 M_4 \sim \triangle B_0 B_2 B_4$ zu verifizieren, bemerken wir, dass die Seiten m_1, m_3, $M_0 \vee M_4$ von $\triangle M_0 M_2 M_4$ auf den entsprechenden Seiten a_1', a_3, $B_0 \vee B_4$ von $\triangle B_0 B_2 B_4$ senkrecht stehen. Da je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke $\triangle_i^B$ resp. $\triangle_i^M$ eine gemeinsame Seite haben, ist der Streckungsfaktor jedes Mal gleich und man überlegt sich leicht, dass die $\triangle_i^M$ in M gleich angeordnet sind wie die $\triangle_i^B$ in B. Alles in allem ergibt sich, dass M als Gesamtfigur ähnlich ist zu dem Tangentenviereck B.

Bemerkung. Ein Leser weist darauf hin, dass diese Aufgabe schon 1959 in einem Trainingsbüchlein der Universität Moskau für die Teilnehmer der 23. Moskauer Mathematik Olympiade enthalten ist.

Aufgabe 1288.

a) Auf wieviele Arten lässt sich ein $3 \times 2m$-Rechteck R_m mit 1×2-Dominosteinen parkettieren?

b) Man beantworte die analoge Frage für $3 \times (2m-1)$-Rechtecke R_m^*, denen ein Eckfeld fehlt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 10 Leser haben Lösungen eingesandt: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

In erster Linie geht es darum, eine Rekursion für die gesuchten Anzahlen herzuleiten und mit bekannten Methoden die Rekursionsgleichung zu lösen. Wir folgen dabei *Henri Carnal*.

Die Basis B des Recktecks R_m sei eine Kante der Länge 3. Auf ihr stehen entweder 3 senkrechte Steine (und es bleibt ein R_{m-1} oder je ein senkrechter und ein waagrechter Stein (dieser links oder rechts), was ein Gebiet der Form R_m^* übrig lässt. Ist also a_m die Anzahl möglicher Parkettierungen von R_m, b_m diejenige von R_m^*, so gilt

$$a_m = a_{m-1} + 2b_m. \tag{1}$$

Bei einer Parkettierung von R_m^* trägt die abgeschnittene Basis entweder einen liegenden Stein (es bleibt ein R_{m-1} übrig) oder 2 senkrechte Steine. In diesem Fall muss noch ein (um eine Einheit gehobener) senkrechter Stein daneben stehen und es bleibt ein R_{m-1}^* übrig. Also ist

$$b_m = a_{m-1} + b_{m-1}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $a_m = 3a_{m-1} + 2b_{m-1}$:

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat die Eigenwerte $u = 2 + \sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ und $v = 2 - \sqrt{3} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}$. Die Lösung hat also die Form $a_m = cu^m + dv^m$. Aus $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ folgt $c = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$, $d = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$:

$$a_m = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2m+1} + (\sqrt{3}-1)^{2m+1}}{2^{m+1}\sqrt{3}} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} 3^k.$$

Ähnlich, diesmal mit $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, erhält man

$$b_m = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2m} + (\sqrt{3}-1)^{2m}}{2^{m+1}\sqrt{3}} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k+1} 3^k.$$

Bemerkungen. In der obigen Rechnung wurde ein fixes Eckquadrat (z.B. unten rechts) weggelassen. Allenfalls muss man noch b_1 mit 2 und b_m ($m \geq 2$) mit 4 multiplizieren. Zwei Leser weisen darauf hin, dass diese Aufgabe im Buch, Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O.: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 2nd ed., 1994, vollständig gelöst ist.

Aufgabe 1289 (Die einfache dritte Aufgabe). Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1$. Man beweise für $b = \sqrt[3]{4/3} = 1.10\ldots$, dass für die Lösung $y(x)$ gilt:

$$\frac{1}{1-x} < y(x) < \frac{1}{1-bx}, \quad 0 < x < \frac{1}{b}.$$

Frieder Grupp, Schweinfurt, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. 10 Leser haben Lösungen zugeschickt: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Viele Löser wählen den naheliegendsten Weg mittels einer Potenzreihe, wie es auch *Peter Bundschuh* gemacht hat, dessen leicht modifizierte Lösung hier wiedergegeben ist.

Mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ist das Anfangswertproblem zu

$$c_0 = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = x^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_{n,2} + \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} c_\nu\right) x^n$$

äquivalent, δ das Kronecker-Symbol. Diese Gleichungskette wiederum ist mit

$$c_0 = 1, \quad \text{und} \quad (n+1)c_{n+1} = \delta_{n,2} + \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} c_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

gleichbedeutend, woraus insbesondere für $n = 0, 1, 2$ die Werte $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 4/3 = b^3$ folgen. Speziell gilt für $n = 0, \ldots, 3$

$$1 \leq c_n \leq b^n$$

und dies bleibt nach (1) induktiv für alle ganzen $n \geq 0$ richtig, wobei man für $n \geq 4$ beidseitig strenge Ungleichungen bekommt. Daraus sehen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ den Konvergenzradius $\geq 1/b$ hat und also mindestens für $|x| < 1/b$ die eindeutige Lösung des Anfangwertproblems darstellt. Für $0 < x < 1/b$ gilt dann

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n < y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \sum_{n=0}^{\infty} (bx)^n = \frac{1}{1-bx},$$

woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung. Mit anderen Methoden lassen sich strengere obere Schranken finden, z.B. gab *Christian Blatter* $b = 17/16 = 1.0625$ an.