Elem. Math. 67 (2012) 151 – 154
0013-6018/12/030151-4
DOI 10.4171/EM/203

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2013 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1305: Vier zufällig und unabhängig gewählte Punkte A, B, C, D auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definieren fast sicher ein nicht entartetes Tetraeder $ABCD$. Die Wahrscheinlichkeit $1/8$, dass $ABCD$ den Koordinatenursprung enthält, und die Wahrscheinlichkeit $1/2$, dass das Seitendreieck ABC spitzwinklig ist, sind wohlbekannt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreffen? Man gebe diese Wahrscheinlichkeit als numerischen Wert oder (wenn möglich) in geschlossener Form an.

Steven Finch, Cambridge (MA), USA

Aufgabe 1306: Eine Folge (a_n) wird durch $a_1 = 1$ und die Rekursion $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ festgelegt. Man zeige dass für $n \geq 2$ gilt:

$$\sqrt{2n + \frac{\ln(n)}{2} - \frac{1}{2}} < a_n < \sqrt{2n + \frac{\ln(n)}{2}}.$$

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Aufgabe 1307 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei ABC ein allgemeines Dreieck und DEF ein ihm eingeschriebenes Dreieck; die Schnittpunkte der Ecktransversalen AD, BE, CF bilden das Routhdreieck PQR. Man betrachte das isotom konjugierte Dreieck $D'E'F'$ (d.h. D' teilt die Strecke BC im umgekehrten Verhältnis wie D, $DB : DC = D'C : D'B$ etc.) und das entsprechende Routhdreieck $P'Q'R'$.

i) Sind die beiden eingeschriebenen Dreiecke flächengleich?
ii) Sind die beiden Routhdreiecke flächengleich?

Peter Nüesch, Lausanne, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2011

Aufgabe 1293. Unter welcher Bedingung kann ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis a und Höhe h der Normalparabel (Quermass $p = \frac{1}{2}$) so einbeschrieben werden, dass alle Ecken auf der Parabel liegen?

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 10 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Egidio Gulfi (Rovio, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der leicht bearbeiteten Lösung von *Hans Brandstetter*. Dazu sei AB die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit Endpunkten auf der Parabel $y = x^2$. Wir teilen die Aufgabe in zwei Fälle.

Fall 1: Der Punkt C liegt auf dem von A und B begrenzten Parabelbogen.

Da die Parabel im Ursprung den kleinsten Krümmungskreisradius hat, ist das Verhältnis maximal, wenn der Punkt C im Ursprung liegt. Für die Eckpunkte ergibt sich $A(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4})$ und $B(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4})$. Die Höhe beträgt für diesen Spezialfall $h = \frac{a^2}{4}$. Liegen die Punkte A und B nicht symmetrisch bezüglich der y-Achse, so muss die Höhe kleiner als $\frac{a^2}{4}$ sein. Wir bekommen damit als Bedingung für den Fall 1:

$$h \leq a^2/4$$

Fall 2: Der Punkt C liegt auf der anderen Parabelseite.

Sind $A(x_a, x_a^2)$, $B(x_b, x_b^2)$ und $M(x_m, y_m)$ die Mitte von AB, so ist $x_m = \frac{1}{2}(x_a + x_b)$ und die Steigung der Sekante AB ist gegeben durch

$$k = \frac{x_b^2 - x_a^2}{x_b - x_a} = x_a + x_b = 2x_m.$$

Damit bekommt man die Punkte A und B indem man von M aus jeweils ein halbes a in Richtung $\vec{v} = (1, 2x_m)^T$ bzw. $-\vec{v}$ geht. Ersetzt man $|\vec{v}| = z = \sqrt{1 + 4x_m^2}$, so ergibt sich $A(x_m + \frac{a}{2z}, y_m + \frac{ax_m}{z})$. Da A auf der Parabel liegt, muss $y_a = x_a^2$ gelten und daraus folgt

$$y_m = x_m^2 + \left(a^2/4z^2\right).$$

Für den Punkt $C(x_c, y_c)$ bekommt man $(x_c, y_c) = (x_m, y_m) + \frac{h}{z}(-2x_m, 1)$. Aus der Bedingung $y_c = x_c^2$ ergibt sich

$$\frac{a^2}{4z^2} + \frac{h}{z} + \frac{4hx_m^2}{z} - \frac{4h^2x_m^2}{z^2} = 0,$$

wenn man y_m, wie oben angegeben, ersetzt. Multipliziert man die Gleichung mit $4z^2$ und ersetzt $4x_m^2 = z^2 - 1$, so erhält man

$$g(z) = 4hz^3 - 4h^2z^2 + a^2 + 4h^2 = 0.$$

Das Polynom $g(z)$ hat für $a > 0$ und $h > 0$ einen Hochpunkt $H(0, a^2 + 4h^2)$ und einen Tiefpunkt $T(\frac{2h}{3}, a^2 + 4h^2 - \frac{16h^4}{27})$. Damit eine positive Nullstelle entsteht, muss die y-Koordinate des Tiefpunktes kleiner oder gleich null sein. Daraus ergibt sich

$$a \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} h\sqrt{4h^2 - 27}.$$

Damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, muss auch $h \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ gelten.
Damit sind die Menge aller Paare (a, h), für die ein gleichschenkliges Dreieck in die Normalparabel einbeschrieben werden kann, gegeben durch

$$\left\{(a,h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,\middle|\, h \leq \frac{a^2}{4} \quad \text{oder} \quad \left(h \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad a \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} h\sqrt{4h^2 - 27}\right)\right\}.$$

Aufgabe 1294. Bestimme alle natürlichen Zahlen n und k für die gilt

$$k^n \cdot n! = n^k \cdot k!.$$

Horst Alzer, Waldbröl, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 16 Leser haben Lösungen eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Egidio Gulfi (Rovio, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*. Wegen der Symmetrie in n und k sind $n = k$ Lösungen. Ist etwa $n > k$, so kürzt man die Gleichung durch $n \cdot k!$ und hat

$$k^n \frac{(n-1)!}{k!} = n^{k-1}.$$

Die linke Seite enthält den Faktor $n - 1$, der zu n, also auch zu n^{k-1} teilerfremd ist (auch natürlich für $k = n - 1$). Daher ist $n - 1 = 1, n = 2, k = 1$.

Aufgabe 1295 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Höhlenbewohner erfuhren den Zahlbegriff über die Mächtigkeiten von verschiedenen Mengen. Ihr Zahlbereich erstreckte sich wohl nur über die ersten paar natürlichen Zahlen; aber sie konnten bestimmt ein wenig addieren und multiplizieren. Beim Grübeln über Anzahlen von Vorfahren oder Nachkommen kamen sie dann auch aufs Potenzieren und im weiteren Verlauf zu der Frage, ob diese dritte Operation, ebenfalls kommutativ ist. Das erste interessante Gegenbeispiel wäre $2^3 \neq 3^2$. Gesucht ist also ein möglichst niederschwelliger Beweis dieses Sachverhaltes.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen: Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir drucken die Lösung von *Walter Nohl* ab.

Wir gehen in Gedanken 50 000 Jahre zurück. Im Neandertal kennen die Bewohner sogar nur die Zahlen 1, 2, 3. Was darüber ist, ist „viel". Sie wissen einiges über den Bereich der „Viel-Zahlen".

1. Es gibt verschiedene Viel-Zahlen.
2. Es gibt die Methode der „konstruktiven Definition" von Viel-Zahlen.
   Beispielsweise erhält man 3^2 Kuchenstücke, wenn man einen Kuchen in drei Teile teilt und anschliessend jeden Teil wieder in drei Teile teilt. Entsprechend kann man 2^3 durch eine Menge von Kuchenstücken repräsentieren.
3. Die Zahlenmenge, zu der auch die Viel-Zahlen gehören, zerfällt in zwei Klassen: Die „Friedenszahlen" und die „Streitzahlen".

   Diese Begriffe haben sich folgendermassen ergeben: Nüssesammler müssen aus Sicherheitsgründen immer zu zweit in den Wald gehen. Am Schluss teilen sie den Ertrag. Da sie im entsprechenden Zahlbereich weder zählen noch rechnen können, haben sie eine geniale Methode zum Teilen erfunden: Sie legen die Nüsse jeweils paarweise auf den Boden, eine Nuss links, eine rechts. Einer der Sammler nimmt die Nüsse links, der andere die Nüsse rechts. Dabei mussten sie die Erfahrung machen, dass manchmal eine Nuss übrig bleibt. Um diese Nuss gab es regelmässig Streit. So sind die Begriffe „Friedenszahl" und „Streitzahl" entstanden.

   Vor einiger Zeit hat der führende Mathematiker des Tals drei sensationelle Theoreme gefunden:

   I. Vereinigt man zwei Mengen, deren Anzahl beide Friedenszahlen sind, so ist die resultierende Anzahl auch eine Friedenszahl.
   II. Ist eine der Anzahlen eine Friedenszahl, die andere eine Streitzahl, so resultiert eine Streitzahl.
   III. Sind beides Streitzahlen, so resultiert eine Friedenszahl.

An einer Sonnwendfeier versammelt sich die ganze Bevölkerung. Dazu gehört der uralte Mathy, der drei Söhne hat, von denen jeder auch drei Söhne hat. Mathy hat also 3^2 Enkel. Auch die uralte Loga ist anwesend, die zwei Töchter hat, von denen jede zwei Töchter hat, die ihrerseits wieder je zwei Töchter haben. Loga hat also 2^3 Urenkelinnen. In der Feststimmung findet die Idee grossen Anklang, die Enkel von Mathy könnten eigentlich die Urenkelinnen von Loga heiraten.

Kurze Zeit nachher meldet sich der jüngste der Jünglinge zum Wort und sagt: Diese Heirat ist unmöglich. Ich beweise es Euch: Nach den bekannten Theoremen ist die Anzahl der Jungfrauen eine Friedenszahl, die Anzahl der Jünglinge aber eine Streitzahl. Fasst man Jungfrauen und Jünglinge zu einer Menge zusammen, so ergibt sich eine Streitzahl. Dann kann man die Menge aber nicht in Zweierklassen zerlegen. Die Argumentation leuchtet allen ein. Sie gewannen die Einsicht, dass 2^3 und 3^2 verschiedene konstruktiv definierte Viel-Zahlen sind.

Welche der beiden Zahlen allerdings grösser ist, blieb den Teilnehmern des Festes weiterhin verborgen.