Elem. Math. 67 (2012) 196 – 199
0013-6018/12/040196-4
DOI 10.4171/EM/210

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2013 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1308: Seien a und b positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise, dass

$$\frac{83}{90} < a^{\tan(\frac{\pi b}{2})} + b^{\tan(\frac{\pi a}{2})} \leq 1.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1309: Einem Kreisringsektor mit den Radien r, R mit $0 \leq r < R$ und dem Zentriwinkel α mit $0 < \alpha \leq \pi/2$ soll ein Rechteck mit möglichst kleinem Flächeninhalt so umschrieben werden, dass mindestens eine Rechteckseite Tangente des äusseren Kreises ist. Man ist geneigt, dazu der symmetrischen Lage mit einer Rechteckseite als Scheitelpunktstangente des äusseren Kreises den Vorzug zu geben.

Wenn aber der innere Radius r (bezüglich R) genügend klein ist, stösst man auf eine günstigere Lösung.

Man finde dazu ohne Einsatz der Differentialrechnung eine Bedingung für r in Abhängigkeit von R und α.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1310 (Die einfache dritte Aufgabe): Für wieviele natürliche Zahlen $n < 10^6$ ist die alternierende Ziffernsumme gleich 0?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2011

Aufgabe 1296. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Beweise, dass

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\sqrt{\tanh(a_k)}\right) < 1-\sqrt{\tanh\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)}.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 10 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Charles Delorme (Paris, F), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Alle Löser benutzen vollständige Induktion und die meisten bemerken auch dass die Ungleichung nur für $n \geq 2$ gilt, da für $n = 1$ trivialerweise die Gleichheit gilt. Wir folgen der Lösung von *Roland Wyss*.

Zum Beweis der Ungleichung mittels vollständiger Induktion hat man für $n = 1$ vorerst die Gleichheit der beiden Seiten. Für $n = m + 1$ hat man die linke Seite der Ungleichung

$$\prod_{k=1}^{m}(1-\sqrt{\tanh(a_k)}) \cdot (1-\sqrt{\tanh(a_{m+1})}) < \left(1-\sqrt{\tanh\Bigl(\sum_{k=1}^{m} a_k\Bigr)}\right)(1-\sqrt{\tanh(a_{m+1})})$$

nach der Induktionsvoraussetzung für $n = m$. Nach dem Additionstheorem der tanh-Funktion ist die rechte Seite der Ungleichung

$$1-\sqrt{\tanh\Bigl(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\Bigr)} = 1-\sqrt{\frac{\tanh\Bigl(\sum_{k=1}^{m} a_k\Bigr)+\tanh(a_{m+1})}{1+\tanh\Bigl(\sum_{k=1}^{m} a_k\Bigr)\tanh(a_{m+1})}}.$$

Mit den Abkürzungen $x^2 = \tanh(\sum_{k=1}^{m} a_k)$, $y^2 = \tanh(a_{m+1})$ hat man noch die Ungleichung

$$(1-x)(1-y) < 1-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2}}$$

beziehungsweise

$$(x+y-xy)^2(1+x^2y^2)-(x^2+y^2) > 0$$

mit Werten $x, y \in (0,1)$ (da alle $a_k > 0$ sind) zu beweisen.

Um diese hinderlichen Bereichseinschränkung der Argumente zu umgehen, setzt man die Transformation $x = \frac{s}{1+s}$, $y = \frac{t}{1+t}$ mit $s, t \in (0, \infty)$ an. Eine fleissige Rechnung führt die letzte Ungleichung in

$$st(2s^2t + 2st^2 + 2s^2 + 2t^2 + 7st + 4s + 4t + 2) > 0$$

über, welche im angegebenen Bereich sicher gültig ist.

Aufgabe 1297. Wohl nur im Verkehrsstau kommt man auf die Idee bei der Nummer des voranstehenden Autos die Quersumme auszurechnen und zu schauen, ob diese gerade durch die vorderste und hinterste Ziffer (als Zahl gelesen) der Autonummer angezeigt wird.

Wie gross ist die relative Häufigkeit dieses Ereignisses bei sechsstelligen Autonummern?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 14 Leser haben Lösungen eingesandt: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Charles Delorme (Paris, F), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während sich einige die Mühe machen dafür ein kleines Computerprogramm zu schreiben um die Lösungen zu zählen nutzen andere kombinatorische Methoden. Wir drucken die Lösung von *Fritz Siegerist* ab.

Unter den $n = 900\,000$ sechststelligen Autonummern ‚*abcdef*‘ sind jene k zu bestimmen, welche $a + b + c + d + e + f = 10a + f$ erfüllen. Die äquivalente Gleichung

$$\frac{b + c + d + e}{9} = a$$

lässt aufgrund des Satzes über die Neunerprobe von den 9 999 Zahlen ‚*bcde*‘ (wegen $a > 0$ ohne ‚0000‘) nur genau die durch 9 teilbaren zu, also deren 1 111. Da die Ziffer f von 0 bis 9 variieren kann, gilt $k = 10 \cdot 1\,111$.

Die gesuchte relative Häufigkeit beträgt somit

$$\frac{k}{n} = \frac{1\,111}{90\,000} = 0.0123\overline{4}.$$

Aufgabe 1298 (Die einfache dritte Aufgabe). Sei ABC ein Dreieck und seien A' (rsp. B', C') auf der zu A (rsp. B, C) gegenüberliegenden Seite des Dreieck so, dass sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt P schneiden. Beweise, dass die Dreiecke $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ genau dann denselben Flächeninhalt haben, wenn P der Schwerpunkt des Dreiecks ist.

Sadi Abu-Saymeh und Mowaffaq Hajja, Irbid, JOR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 20 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Egidio Gulfi (Rovio, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter, Koller (Zürich, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir drucken die Lösung von *Walter Burgherr* ab, der als einziger ohne explizite Rechnung auskommt.

Ist P der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist das Dreieck $A'B'C'$ identisch mit dem Mittendreiecks DEF (d.h. $A' = D$, $B' = E$, $C' = F$) und die Flächen der Dreiecke $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ wie auch des Mittendreiecks betragen je einen Viertel der Gesamtfläche.

Ist P verschieden vom Schwerpunkt S, also $P \neq S$, und liegt z.B. P im Dreieck AFS (inkl. Rand ohne S), so sind die Strecken $AC' \leq AF$ und $AB' < AE$ und damit $CB' > CE$ sowie $CA' \geq CD$. Es ist dann die Fläche von $AB'C'$ kleiner als die Fläche von AEF, dagegen die Fläche von $CA'B'$ grösser als jene von CDE. Die drei durch P definierten Flächen sind nicht gleich. Analog argumentiert man, falls $P \neq S$ in einem der restlichen Dreiecke BFS, BDS, CDS, CES oder AES liegt.