
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2013 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1311: Ermittle für $0 \leq x, y, z \leq 1$ das Minimum und Maximum des Terms

$$S(x, y, z) = \frac{x-y}{z+1} + \frac{y-z}{x+1} + \frac{z-x}{y+1}.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

Aufgabe 1312: Sei A eine reelle symmetrische 3×3 Matrix mit den Eigenwerten $0, \lambda, \lambda$, wobei $\lambda < 0$. Man weise nach, dass A genau zwei schiefssymmetrische Quadratwurzeln hat. Wie lauten diese in Abhängigkeit von A ?

Oskar Maria Baksalary, Poznań, PL,
Adam Mickiewicz, Poznań, PL
und Götz Trenkler, Dortmund, D

Aufgabe 1313 (Die einfache dritte Aufgabe): Durch die Punkte A_1 und A_2 , die Punkte B_1 und B_2 und letztlich durch die Punkte C_1 und C_2 seien zueinander paarweise windschiefe Geraden gegeben. Gesucht sind drei paarweise zueinander senkrecht stehende Ebenen, welche je eine dieser Geraden enthalten, und deren Schnittpunkt. Man beschreibe eine Lösung zur Berechnung dieser Ebenen und führe sie konkret mit folgenden Angaben aus:

$$A_1(4, 0, 6), A_2(6, -1, 5), B_1(-2, -1, -4), B_2(5, -3, 0), C_1(3, 2, 5), C_2(6, 4, 3).$$

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2012

Aufgabe 1299. Seien a, b, c und a', b', c' zueinander duale Basen des \mathbb{R}^3 . Es gilt also $a \circ a' = 1, a \circ b' = 0, a \circ c' = 0$, etc. Dabei bezeichnet \circ das übliche Skalarprodukt. Man beweise, dass die folgenden Gleichungen paarweise äquivalent sind:

$$(i) \quad a' \circ b' = 0 \quad (ii) \quad (a \circ c)(b \circ c) = (a \circ b)(c \circ c)$$

$$(iii) \quad a' \circ a' = \frac{c \circ c}{(a \circ a)(c \circ c) - (a \circ c)^2}$$

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Lösungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Paul Weisenhorn (Achern, D).

Einige Leser führen ein geeignetes Koordinatensystem ein um die Aufgabe zu lösen. Wir folgen der Lösung von *Joachim Klose*, der koordinatenfrei auskommt.

Zu einer gegebenen Basis a, b, c des \mathbb{R}^3 existiert genau eine (im angegebenen Sinne) duale Basis a', b', c' . Daraus ergibt sich sofort, dass die zur Basis a', b', c' duale Basis a'', b'', c'' die ursprüngliche Basis ist. Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \quad (a, b, c) \text{ als Zeilenvektoren}$$

$A' = (a' \ b' \ c') \in GL_3(\mathbb{R})$, (a', b', c') als Spaltenvektoren, so ist

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a \circ a' & a \circ b' & a \circ c' \\ b \circ a' & b \circ b' & b \circ c' \\ c \circ a' & c \circ b' & c \circ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $A' = A^{-1}$.

Wegen $a' \perp b, a' \perp c$ ist a' ein skalares Vielfaches des Vektorproduktes von b und c , also $a' = \lambda(b \times c)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus $1 = a \circ a' = a \circ \lambda(b \times c)$ folgt wegen $a \circ (b \times c) = \det(A)$ (Spatprodukt) die Beziehung $\lambda = 1/d$ mit $d = \det(A)$. Dies errechnet man ebenso für b', c' , sodass also gilt

$$a' = \frac{1}{d}(b \times c), \quad b' = \frac{1}{d}(c \times a), \quad c' = \frac{1}{d}(a \times b).$$

Wegen $a' \circ b' = \frac{1}{d^2}(b \times c) \circ (c \times a)$ folgt mit der bekannten Formel für das Skalarprodukt zweier Vektorprodukte $(b \times c) \circ (c \times a) = (a \circ c)(b \circ c) - (a \circ b)(c \circ c)$, dass

$$a' \circ b' = \frac{1}{d^2}((a \circ c)(b \circ c) - (a \circ b)(c \circ c)).$$

Hieraus erhält man die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii).

Wegen

$$b' \circ b' = \frac{1}{d^2}(c \times a) \circ (c \times a) = \frac{1}{d^2}((a \circ a)(c \circ c) - (a \circ c)^2)$$

ist die Gleichung

$$a' \circ a' = \frac{c \circ c}{(a \circ a)(c \circ c) - (a \circ c)^2} \quad (1)$$

äquivalent zur Gleichung

$$(a' \circ a')(b' \circ b') = \frac{1}{d^2}(c \circ c). \quad (2)$$

Nun ist – wie eingangs bemerkt – $c = c''$, also $c = 1/d' \cdot (a' \times b')$ mit $d' = \det(A') = 1/d$. Es folgt

$$\frac{1}{d^2}(c \circ c) = (a' \times b') \circ (a' \times b') = (a' \circ b')(b' \circ b') - (a' \circ b')^2.$$

Somit gilt $(a' \circ a')(b' \circ b') = 1/d^2 \cdot (c \circ c)$ genau dann, wenn $a' \circ b' = 0$; dies bedeutet wegen der Äquivalenz von (1) und (2) die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (iii).

Aufgabe 1300. Vier punktförmige Käfer A, B, C bzw. D sitzen je in einer Ecke eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge 1. Sie laufen gleichzeitig und mit derselben konstanten Geschwindigkeit los, indem sie

- im Raum
- auf der Tetraederoberfläche

stets die Richtung des jeweils kürzesten Weges zum Käfer B, C, D bzw. A beibehalten. Gesucht sind (ohne Zeitparameter) die Bahngleichungen eines je geeigneten Koordinatensystems, bei b) in der Abwicklung.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 3 Lesern haben Beiträge eingesandt: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH) und Frieder Grupp (Schweinfurt, D).

Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*.

a) R, S, T, U, V, W sind die Kantenmittelpunkte und G der Schwerpunkt des Tetraeders, der zum Koordinatenursprung gewählt wird. Die Basisvektoren sind $\vec{r} = \overrightarrow{GR}$, $\vec{s} = \overrightarrow{GS}$, $\vec{t} = \overrightarrow{GT}$. Sie sind paarweise orthogonal und haben die Länge $1/\sqrt{8}$ (man denke sich die Tetraederkanten als Seitendiagonalen auf einem Würfel mit Kantenlängen $1/\sqrt{2}$). A hat die Koordinaten $(1, -1, 1)$ bezüglich der Basis $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ (Fig. 1).

Der dort startenden Käfer K_A befinde sich zur Zeit t in P mit Koordinaten (x, y, z) . Betrachtet man K_B anstatt von K_A , so ersetzt man ABC durch BCD , RST durch SUV , also $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ durch $\vec{s}, -\vec{r}, -\vec{t}$ und man hat aus Symmetriegründen $\overrightarrow{GQ} = x\vec{s} - y\vec{r} - z\vec{t}$ (Q ist die Position von K_B), d.h. $\overrightarrow{PQ} = -(x+y)\vec{r} + (x-y)\vec{s} - 2z\vec{t}$.

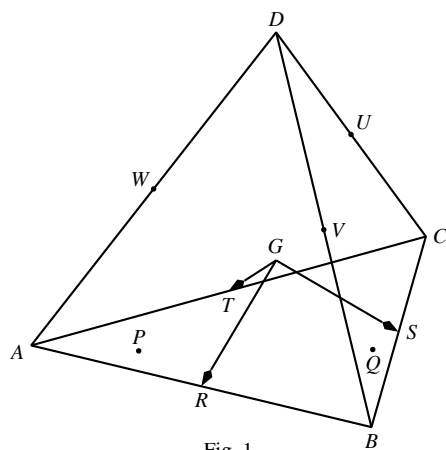


Fig. 1

Weil $(dx, dy, dz) = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} \cdot k dt = \vec{PQ} \cdot du$ ($du = \frac{k}{\|\vec{PQ}\|} dt$), gilt

$$-\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{x-y} = -\frac{dz}{2z} = du.$$

Mit den Anfangswerten $(1, -1, 1)$ ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} x &= e^{-u}(\sin(u) + \cos(u)) = e^{-u}\sqrt{2}\cos(u - \frac{\pi}{4}) \\ y &= e^{-u}(\sin(u) - \cos(u)) = e^{-u}\sqrt{2}\sin(u - \frac{\pi}{4}) \\ z &= e^{-2u}. \end{aligned}$$

K_A bewegt sich also auf dem Paraboloid $z = \frac{x^2+y^2}{z}$ und die Projektion seiner Bahn auf die xy -Ebene ist eine logarithmische Spirale $\rho = ce^{-\varphi}$. Wegen der verkürzten Basisvektoren ist $\rho^2 = (x^2 + y^2)/8$ und es ist $\varphi = \arctan(y/x) = u - \frac{\pi}{4}$, also $c = \frac{1}{2}e^{\pi/4}$.

b) Man klappt das Dreieck BCD um die Kante BC in die Grundfläche. K_A bewegt sich dann in Richtung des (umgeklappten) Punktes Q . Ist $\vec{AP} = x\vec{i} + y\vec{j}$, so aus Symmetriegründen $\vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BQ} - \vec{AP} = (1-2x)\vec{i} + x\vec{j}$ (Fig. 2).

Daraus folgt $dy/dx = x/(1-2x)$ und da $y = 0$ für $x = 0$,

$$y = -\frac{1}{4}\log(|1-2x|) - \frac{x}{2} = f(x).$$

Wir brauchen noch die Eigenschaft

$$f(1-x) = f(x) + x - \frac{1}{2}. \quad (1)$$

K_A erreicht die Kante BC in $A_1(x_1, y_1)$ mit $x_1 + y_1 = 1$. man erhält $x_1 \approx (1 - e^{-3})/2 \approx 0.476$. Nun läuft K_A im Dreieck BCD weiter, wo man die Basis $\vec{j} - \vec{i}, \vec{j}$ verwendet. A_1 hat nun die Koordinaten $(y_1, 0)$ und es ist gemäss (1) $f(y_1) = f(x_1) + x_1 - \frac{1}{2} = y_1 + x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Also hat die Bahn nun die Gleichung $y = f(x) - \frac{1}{2}$. Die Kante CD wird im Punkt A_2 mit $x_2 + y_2 = 1$, d.h. $x_2 + f(x_2) = \frac{3}{2}$ und $x_2 \approx (1 + e^{-5})/2$, $f(y_2) = f(1-x_2) = 1$. In der

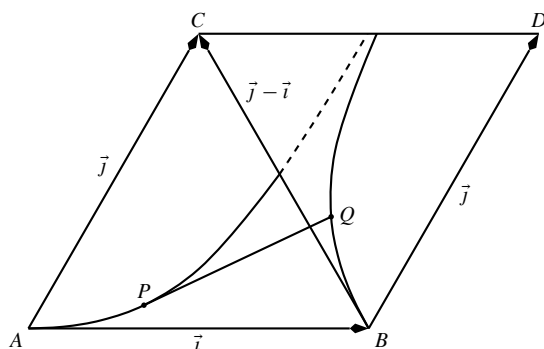


Fig. 2

Folge ist $x_3 \approx (1 - e^{-7})/2$, $x_4 \approx (1 + e^{-9})/2$, usw., d.h. dass die Verfolgung asymptotisch auf dem Quadrat $SUWR$ erfolgt.

Bemerkung: Aus dem obenstehenden Ergebnis leicht herleitbar ist die von den Aufgabenautoren angegebene Lösung: Bezüglich der Basis $\vec{e}_1 = \vec{j}/4$, $\vec{e}_2 = \vec{j}/4 - \vec{i}/2$ und $\vec{OA} = \vec{e}_2$ ist die Bahn $\vec{OP} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2$ des Käfers K_A gegeben durch die Gleichung $\eta = e^{-\xi}$.

Aufgabe 1301 (Die einfache dritte Aufgabe). Gegeben sei ein 3×3 magisches Quadrat aus natürlichen Zahlen, nicht notwendig verschieden. Man zeige, dass 3 die einzige mögliche magische Zahl ist, die auch Primzahl ist.

Dietrich Trenkler, Osnabrück, D und Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. 11 Leser haben Lösungen zugeschickt: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Achern, D).

Alle Löser gehen ähnlich vor wie *Walther Janous*, dessen Lösung wir hier angeben.

Wir zeigen sogar, dass die magische Zahl m eines jeden 3×3 -Quadrates durch 3 teilbar ist. Dazu sei

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

das in Rede stehende magische Quadrat. Dann haben wir wegen

$$m = a + b + c = g + h + i = a + e + i = g + e + c,$$

dass

$$a + b + c + g + h + i = a + e + i + g + e + c, \quad \text{d.h.} \quad b + h = 2e.$$

Wegen $m = b + e + h$ ist somit

$$m = 3e.$$