Elem. Math. 68 (2013) 128 – 133
0013-6018/13/030128-6
DOI 10.4171/EM/230



Elemente der Mathematik

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2014 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1317:** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sec^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{8}{3}n(n+1)(n^2+n+1).$$

Michael Vowe, Therwil, CH

**Aufgabe 1318:** Seien $R$ und $r < R$ die Radien zweier Kreise, die sich von innen berühren. Die Sehne $AC$ des grösseren Kreises berühre den kleineren Kreis im Punkt $B$. Beweise, dass

$$\frac{AC}{2\sqrt{AB \cdot BC}} < \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Yagub N. Aliyev, Khyrdalan, AZ

**Aufgabe 1319 (Die einfache dritte Aufgabe):** Die Felder eines $n \times n$-Quadrats seien so mit den Ziffern 1 bis 9 belegt, dass alle Zeilen- und Spaltensummen ungerade sind. Für $n = 3$ und $n = 4$ bestimme man die Anzahl solcher Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2012

**Aufgabe 1305.** Vier zufällig und unabhängig gewählte Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definieren fast sicher ein nicht entartetes Tetraeder $ABCD$. Die Wahrscheinlichkeit $1/8$, dass $ABCD$ den Koordinatenursprung enthält, und die Wahrscheinlichkeit $1/2$, dass das Seitendreieck $ABC$ spitzwinklig ist, sind wohlbekannt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreffen? Man gebe diese Wahrscheinlichkeit als numerischen Wert oder (wenn möglich) in geschlossener Form an.

Steven Finch, Cambridge (MA), USA

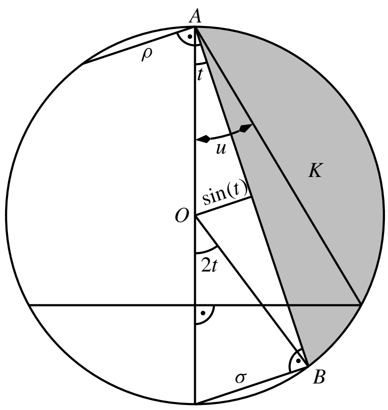
Einige Löser simulierten das Problem mit Zufallszahlen, nur *Walter Burgherr* und *Henri Carnal*, dessen Lösung wir hier präsentieren, lieferten analytische Lösungen.

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Beiträge von 5 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A) und Fritz Siegerist (Küsnacht, CH).

$F$ sei das Ereignis „$ABC$ spitzwinklig“ mit der Indikatorfunktion $1_F$ (1 falls $F$ eintrifft und 0 sonst), $G$ sei das Ereignis „$O$ im Tetraeder $ABCD$“. Die Antipode von $D$ heisse $D'$, die Winkel im *sphärischen* Dreieck $ABC$ heissen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, womit dieses Dreieck die Oberfläche $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ besitzt und $D'$ mit Wahrscheinlichkeit $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/4\pi$ enthält, was $G$ entspricht. Also

$$P(F \cap G) = P(F) \cdot E(\alpha+\beta+\gamma-\pi \,|\, F)\frac{1}{4\pi} = \frac{3}{4\pi}E(\alpha \cdot 1_F) - \frac{1}{4}P(F). \qquad (1)$$

Nach der Wahl von $A$ und $B$ wählt man die Koordinaten so, dass $A$ im Nordpol und $B$ auf dem Meridian $\{x=0,\, y>0\}$ liegt.




$F$ tritt ein, wenn $C$ im Gebiet $H$ zwischen den Ebenen $\sigma$ und $\rho$ liegt (je mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{AB}$), jedoch nicht auf der Kalotte $K$. Da die Fläche einer Kalotte proportional zur Höhe ist, gelten

$$P(C \in K) = \frac{1-\sin(t)}{2}, \qquad (2) \qquad\qquad P(C \in H) = \cos(t), \qquad (3)$$

$$P(t < u) = P(z_B < -\cos(2u)) = \frac{1-\cos(2u)}{2} = \int_0^u \sin(2t)\, dt.$$

Daher hat $t$ die Dichte $\sin(2t)$ und man berechnet aus (2) und (3):

$$P(C \in K) = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin(t)}{2} \sin(2t)\,dt = \frac{1}{6},$$
$$P(C \in H) = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(2t)\,dt = \frac{2}{3},$$

und daraus $P(F) = P(C \in H) - P(C \in K) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
Mit $K_+ = K \cap \{x > 0\}$ gilt noch $E(\alpha \cdot 1_{\{C \in K\}}) = 2E(\alpha \cdot 1_{\{C \in K_+\}})$, sowie

$$E(\alpha \cdot 1_F) = E(\alpha \cdot 1_{\{C\in H\}}) - E(\alpha \cdot 1_{\{C \in K\}}). \tag{4}$$

Da mit $C \in H$ auch $C' \in H$ gilt und für die sphärischen Winkel $\sphericalangle CAB + \sphericalangle C'AB = \pi$, haben wir

$$E(\alpha \cdot 1_{\{C\in H\}}) = \frac{1}{2} E((\sphericalangle CAB + \sphericalangle C'AB) \cdot 1_{\{C \in H\}}) = \frac{\pi}{2} P(C \in H) = \frac{\pi}{3}. \tag{5}$$

Um $E(\alpha \cdot 1_{\{C\in K\}})$ zu berechnen, betrachten wir (für $0 < \alpha < \pi/2$) den Meridian $\{x = \sin(\varphi)\sin(\alpha),\ y = \sin(\varphi)\cos(\alpha),\ z = \cos(\varphi) : 0 < \varphi < \pi\}$, der mit dem Bogen $AB$ den Winkel $\alpha$ macht und die Basis der Kalotte $K$ (also die Ebene $y\cos(t) = (1-z)\sin(t)$) in einem Punkt mit $\sin(\varphi)\cos(\alpha)\cos(t) = (1-\cos(\varphi))\sin(t)$ schneidet, was äquivalent zu $\frac{\cos(\alpha)}{\tan(t)} = \frac{1-\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \tan(\frac{\varphi}{2})$ ist. Der Punkt $C$ liegt also sowohl in $K_+$ wie auch zwischen $M_\alpha$ und $M_{\alpha+d\alpha}$ mit Wahrscheinlichkeit

$$dP = \frac{1-\cos(\varphi)}{2}\frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{\tan^2(\varphi/2)}{1+\tan^2(\varphi/2)}\frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+\tan^2(t)}\frac{d\alpha}{2\pi}$$
$$E(\alpha \cdot 1_{\{C\in K\}}) = 2E(\alpha \cdot 1_{\{C \in K_+\}}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)\,dt}{\cos^2(\alpha)+\tan^2(t)}\right)\alpha\cos^2(\alpha)\,d\alpha.$$

Im inneren Integral setzt man $v = \tan^2(t)$, $dv = 2\sqrt{v}(1+v)\,dt$, $\sin(2t) = \frac{2\sqrt{v}}{1+v}$ und der Integrand wird zu

$$\frac{1}{(1+v)^2(\cos^2(\alpha)+v)}$$
$$= -\frac{1}{1-\cos^2(\alpha)}\frac{1}{(1+v)^2} + \frac{1}{(1-\cos^2(\alpha))^2}\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)+v} - \frac{1}{1+v}\right)$$

und das Integral (von 0 bis $\infty$) ergibt $f(\alpha) = -\frac{1}{\sin^2(\alpha)} - \frac{2\log(\cos(\alpha))}{\sin^4(\alpha)}$.
Wir setzen noch

$$g(\alpha) = \cos^2(\alpha) f(\alpha),$$

d.h. $g(\alpha) = -\cot^2(\alpha) - 2\cot^2(\alpha)(1+\cot^2(\alpha))\log(\cos(\alpha))$ sowie $h(\alpha) = \int_\alpha^{\pi/2} g(x)\,dx$, also $h'(\alpha) = -g(\alpha)$ und $h(\frac{\pi}{2}) = 0$. Es ist

$$h(\alpha) = -\frac{1}{3}\cot(\alpha) - \frac{2}{3}\cot^3(\alpha)\log(\cos(\alpha)) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$
\begin{aligned}
E(\alpha \cdot 1_{\{C\in K\}}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(\alpha)\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\left(-h(\alpha)\alpha\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} h(\alpha)\, d\alpha\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi - 2\alpha}{6}\, d\alpha - \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \cot(\alpha)\Big(2(1+\cot^2(\alpha))\log(\cos(\alpha)) + 1\Big)\, d\alpha \\
&\quad + \frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \cot(\alpha)\log(\cos(\alpha))\, d\alpha.
\end{aligned}
$$

Das erste Integral ergibt $\frac{\pi}{24}$, das zweite $\frac{1}{3\pi}\cot^2(x)\log(\cos(x))\big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6\pi}$ und das dritte (mit Hilfe von $\int_0^1 u^{m-1}\log(u)\, du = \frac{u^m}{m}\log(u)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{m}\, du = -\frac{1}{m^2}$) mit der Substitution $u = \cos(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \cot(\alpha)\log(\cos(\alpha))\, d\alpha &= \frac{2}{3\pi}\int_0^1 \frac{u}{1-u^2}\log(u)\, du \\
&= \frac{2}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u^{2n-1}\log(u)\, du = \frac{2}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(2n)^2} = -\frac{\pi}{36}.
\end{aligned}
$$

Somit ist $E(\alpha \cdot 1_{\{C\in K\}}) = \frac{\pi}{72} + \frac{1}{6\pi}$. Gemäss (4) und (5) folgt $E(\alpha \cdot 1_F) = \frac{23\pi}{72} - \frac{1}{6\pi}$ und gemäss (1) erhält man als Resultat

$$
P(F \cap G) = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{23\pi}{72} - \frac{1}{6\pi}\right) - \frac{1}{8} = \frac{11}{96} - \frac{1}{8\pi^2} = 0.1019\ldots
$$

**Aufgabe 1306.** Eine Folge $(a_n)$ wird durch $a_1 = 1$ und die Rekursion $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ festgelegt. Man zeige dass für $n \geq 2$ gilt:

$$
\sqrt{2n + \frac{\ln(n)}{2} - \frac{1}{2}} < a_n < \sqrt{2n + \frac{\ln(n)}{2}}.
$$

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 9 Leser haben Lösungen eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Daniel Fritze (Berlin, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Johannes Vigfusson (Freienwil, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Die meisten Löser gehen wie *Frieder Grupp* vor und betrachten statt der Folgen $a_n$ die Folge $c_n = a_n^2 - 2n$ und zeigen entsprechende Ungleichungen für diese Folge.

Dann gilt $c_1 = -1$ und $c_n$ genügt für $n \geq 1$ der Rekursion

$$
c_{n+1} = c_n + \frac{1}{c_n + 2n}.
$$

Aus dieser Rekursion bestimmt man leicht $c_2 = 0$ und $c_n > 0$ für $n \geq 2$.

Weiterhin ist für $n \geq 2$

$$c_n = \sum_{k=2}^{n-1}(c_{k+1} - c_k) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{c_k + 2k} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln(n-1) < \frac{1}{2}\ln(n).$$

Dies beweist die rechte Seite der Ungleichung der Aufgabenstellung.

Wegen $c_k < \frac{1}{2}\ln(k)$ gilt für $n \geq 2$

$$c_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{c_k + 2k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{4}\ln(k)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k(k + \frac{1}{4}\ln(k))}\right).$$

Wegen $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_2^n \frac{1}{x}\, dx = \ln(n) - \ln(2)$ und, da $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ monoton fallend ist für $x \geq \sqrt{e}$, ist

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k(k + \frac{1}{4}\ln(k))} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} < \frac{\ln(2)}{4} + \int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\ln(2) + 1\right).$$

Es folgt insgesamt

$$c_n > \frac{1}{2}\big(\ln(n) - \ln(2)\big) - \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\ln(2) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(n) - \frac{1}{8} - \frac{19}{16}\ln(2)\right) > \frac{1}{2}\big(\ln(n) - 1\big).$$

Damit ist auch die linke Ungleichung der Aufgabenstellung gezeigt.

**Aufgabe 1307 (Die einfache dritte Aufgabe).** Sei $ABC$ ein allgemeines Dreieck und $DEF$ ein ihm eingeschriebenes Dreieck; die Schnittpunkte der Ecktransversalen $AD$, $BE$, $CF$ bilden das Routhdreieck $PQR$. Man betrachte das isotom konjugierte Dreieck $D'E'F'$ (d.h. $D'$ teilt die Strecke $BC$ im umgekehrten Verhältnis wie $D$, $DB : DC = D'C : D'B$ etc.) und das entsprechende Routhdreieck $P'Q'R'$.

i) Sind die beiden eingeschriebenen Dreiecke flächengleich?

ii) Sind die beiden Routhdreiecke flächengleich?

Peter Nüesch, Lausanne, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 9 Leser haben Beiträge eingesandt: Francisco Bellot Rosado (Valladolid, E), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Wir folgen der Lösung von *Hans Egli*, der wie die meisten Leser den Satz von Routh beizieht.

Mit den Bezeichnungen $BD = a_1 = CD'$, $CD = a_2 = BD'$, etc. berechnet man die Fläche von $BDF$ als das $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{c_2}{c}$-fache der Fläche von $ABC$. Analoge Formeln gelten für die Dreiecke $CED$, $AEF$, $BD'F'$, $CE'D'$ und $AE'F'$.

Damit lassen sich jetzt die Flächen der Dreiecke $DEF$ und $D'E'F'$ berechnen:

$$A_{DEF} = A_{ABC} - A_{BDF} - A_{CED} - A_{AEF} = A_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{a_1c_2}{ac} - \frac{b_1a_2}{ba} - \frac{c_1b_2}{cb}\right).$$

Nach dem Gleichnamigmachen fallen die meisten Glieder weg und man bekommt

$$A_{DEF} = A_{ABC} \cdot \frac{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}{abc} = A_{D'E'F'},$$

woraus man sofort die erste Frage bejahen kann.

Der Satz von Routh gibt das Flächenverhältnis des Routhdreiecks $PQR$ zum Ausgangsdreieck $ABC$ an:

$$\frac{A_{PQR}}{A_{ABC}} = \frac{(a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2)^2}{(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2)(b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_2)(c_1a_1 + c_1a_2 + c_2a_2)}$$

Für das konjugierte Dreieck $P'Q'R'$ erhält man

$$\frac{A_{P'Q'R'}}{A_{ABC}} = \frac{(a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1)^2}{(a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_1)(b_2c_2 + b_2c_1 + b_1c_1)(c_2a_2 + c_2a_1 + c_1a_1)}.$$

Die Routhdreiecke sind also im allgemeinen nicht flächengleich, womit auch die zweite Frage beantwortet ist.