Elem. Math. 69 (2014) 57 – 60
0013-6018/14/020057-4
DOI 10.4171/EM/247

Elemente der Mathematik

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke

Helmut Bergold

Helmut Bergold studierte von 1952 bis 1957 in München Mathematik und Physik für das Lehramt und wurde dort 1964 in Theoretischer Physik promoviert. Bis 1996 unterrichtete er in allen Stufen des Gymnasiums, arbeitete an der Reform von Lehrplänen und leitete die fachpädagogische Ausbildung von Studienreferendaren.

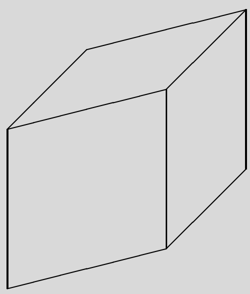
1 Vorbereitung

Zur Sprachvereinfachung sei vereinbart, dass paarweise orthogonale gleich lange Vektoren auch dann orthonormal genannt werden, wenn ihre gemeinsame Länge positiv aber nicht gleich 1 ist. – Es gilt der bekannte Satz, dass in einer quadratischen Matrix die Spaltenvektoren und die Zeilenvektoren nur *zugleich* orthonormal sein können (*„Würfelmatrix“*).

Das Rechnen mit orthonormalen Vektoren wird bedeutend erleichtert, wenn man komplexe Zahlen heranzieht. Schon bei Gauss [1] findet sich der folgende

Hilfssatz. (i) Die Vektoren$(x_1|x_2|x_3)$ und $(y_1|y_2|y_3)$ sind genau dann orthonormal, wenn die komplexen Zahlen

$$s_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, s_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2, s_3 = x_3 + \mathrm{i}y_3 \tag{1}$$



Der Landschaftsmaler Karl Pohlke erkannte 1853, dass jedes „Schrägbild“ in der Art unserer kleinen Zeichnung den geometrisch korrekten Anblick eines Würfels liefert, wenn man es nur in passender Richtung betrachtet. Der Leser möge es ausprobieren! Der Satz von Pohlke wurde berühmt als *Hauptsatz der Axonometrie* zur formalen Rechtfertigung für die gängigen Regeln des technischen und perspektivischen Zeichnens, und Pohlke wurde Professor für darstellende Geometrie und Perspektive an der Bau- und gleichzeitig an der Kunstakademie in Berlin. Der Autor des vorliegenden Artikels beweist darüber hinaus, dass auch jede „schiefe Kiste“ (jedes Parallelepiped), richtig angeschaut, einem Würfel gleicht.

nicht sämtlich Null sind, aber eine verschwindende Quadratsumme haben:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 0, \text{ nicht } s_1 = s_2 = s_3 = 0. \tag{2}$$

(ii) Für jede komplexe Zahl t liefert der Ansatz

$$s_1 = t^2 - 1, s_2 = \mathrm{i}(t^2 + 1), s_3 = 2t \tag{3}$$

eine nichttriviale Lösung der Gleichung (2).

Beide Aussagen des Hilfssatzes beweist man leicht durch direktes Ausrechnen.

2 Gleiche Ansichten

Die Ansicht, die ein räumlicher Körper dem Auge aus größerer Entfernung bietet, ist durch seine Parallelprojektion in Blickrichtung auf eine Ebene senkrecht dazu bestimmt. In diesem Sinne formulieren wir unser Hauptergebnis:

Satz 1. *Zwei beliebige Parallelepipede können stets so gedreht werden, dass sie gleich aussehen, das heißt, dass ihre Projektionen auf eine Ebene senkrecht zur Blickrichtung einander ähnlich sind. Das eine der beiden Parallelepipede kann dabei auch ein ebenes „Schrägbild“ sein.*

Bemerkung. Ist das eine der beiden Parallelepipede ein ebenes Schrägbild und das andere Parallelepiped ein Würfel, so ergibt sich aus Satz 1 der Satz von Pohlke [2].

Wir wollen Satz 1 auf einen einfacheren Spezialfall zurückführen. Ein Parallelepiped werde durch drei Kantenvektoren aufgespannt und deren Koordinatenspalten zur 3×3-Matrix V vereinigt (kartesische Koordinaten). Dann lässt sich jede Orthogonalprojektion des Parallelepipeds durch eine Matrix OWV darstellen. Hierbei ist W eine Würfelmatrix und

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine „Projektionsmatrix“, welche lediglich die dritte Zeile von WV zu Null macht, also das mit W gedrehte Parallelepiped in 3-Richtung auf die 1-2-Ebene projiziert.

Gibt nun ein zweites Parallelepiped, passend gedreht und ebenso projiziert, eine *ähnliche* Projektion, so kann man es nachträglich vergrößern/verkleinern, um die 3-Achse drehen und ggf. an der 1-3-Ebene spiegeln, so dass die beiden Projektionen *identisch* werden. Ist U die gegebene Matrix des zweiten Parallelepipeds, so besagt also Satz 1: Es gibt zwei Würfelmatrizen W und W' derart, dass die Matrixgleichung

$$OWV = OW'U \tag{4}$$

gilt. Dabei muss eine der gegebenen Matrizen den Rang 3 und die andere mindestens den Rang 2 haben. – Ist z.B. der Rang von U gleich 3, so ist Gleichung (4) äquivalent zu

$$OWVU^{-1} = OW',$$

wo die Matrix VU^{-1} wieder den Rang 2 oder 3 hat. Satz 1 ist damit auf den spezielleren Satz zurückgeführt:

Satz 2. Zu jeder 3×3-Matrix M vom Rang ≥ 2 gibt es Würfelmatrizen W und W' mit

$$OWM = OW'. \tag{5}$$

In Worten: *Jedes (ggf. ausgeartete) Parallelepiped sieht, in geeigneter Richtung betrachtet, wie ein Würfel aus.*

Beweis. 1. Gleichung (5) verlangt, dass die ersten beiden Zeilen der Matrix WM orthonormal sind. Ist diese notwendige Bedingung erfüllt, dann kann man eine dritte Zeile so hinzubestimmen (sogar bis aufs Vorzeichen eindeutig), dass eine Würfelmatrix W' entsteht, welche der Gleichung genügt. Die Bedingung ist also auch hinreichend.

2. Man überzeugt sich leicht, dass in den ersten zwei Zeilen von WM nur die ersten zwei Zeilen von W vorkommen. Mit der gleichen Argumentation wie in 1. folgt, dass es genügt, diese zwei Zeilen orthonormal zu machen.

3. Nun sei

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben und} \quad W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad \text{gesucht.}$$

Führt man hier komplexe Unbekannte $s_{1,2,3}$ gemäß (1) ein, so wird zunächst die oben in 2. genannte Bedingung für W durch die Gleichung (2) mit ihrem Zusatz wiedergegeben. Die oben in 1. formulierte Bedingung für WM erhält die Form

$$(s_1a_1 + s_2a_2 + s_3a_3)^2 + (s_1b_1 + s_2b_2 + s_3b_3)^2 + (s_1c_1 + s_2c_2 + s_3c_3)^2 = 0, \tag{6}$$

wieder mit dem Zusatz „nicht alle drei Klammern gleich Null".

Wir lösen Gleichung (2) mit dem Ansatz (3) und setzen diese Lösungen in Gleichung (6) ein:

$$(t^2(a_1 + \mathrm{i}a_2) - a_1 + \mathrm{i}a_2 + 2ta_3)^2 + \text{entsprechende Terme mit } b_{1,2,3} \text{ und } c_{1,2,3} = 0$$

oder mit den komplexen Zahlen $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, b und c entsprechend:

$$t^4(a^2 + b^2 + c^2) + (\text{Polynom höchstens dritten Grades in } t) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt sicher eine komplexe Lösung t, wenn nur der Koeffizient von t^4 nicht verschwindet. Ist dies aber doch der Fall, so sind nach Hilfssatz (i) die ersten zwei Zeilen von M orthonormal; schon das gegebene unverdrehte Parallelepiped sieht in 3-Richtung betrachtet wie ein Würfel aus und es ist nichts zu beweisen.

4. Es bleibt noch zu prüfen, ob in Gleichung (6) nicht alle drei Klammern zu Null werden können. Dann wären aber in WM die ersten zwei Zeilen identisch Null; der Rang von WM und damit auch der von M wäre höchstens 1, entgegen der Voraussetzung.

Zum Schluß werde nochmals Satz 1 betrachtet. Er verlangt mindestens *ein* echt räumliches Parallelepiped. In der Tat geht es nicht ohne diese Forderung. Zwei ebene Schrägbilder haben im allgemeinen keine ähnlichen Orthogonalprojektionen. Sonst könnte man sie ja (nachdem man sie in der Größe angepasst hat) so aufstellen, dass das eine eine Parallelprojektion des andern ist, dass sie also affin auf einander abgebildet sind. Gilt dann für die erzeugenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des einen Schrägbilds die Relation $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0$, so müsste für ihre Bilder $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ bei der affinen Abbildung eine Relation mit den gleichen Koeffizienten gelten, was natürlich im allgemeinen nicht der Fall ist.

Literatur

[1] Gauss, Carl Friedrich: *Werke* Band II S. 309; Band VIII S. 345–347. Leipzig: Teubner 1900

[2] Scriba, Christoph J./Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie*. Berlin etc.: Springer 2000; S. 365, 449, 450

Dr. Helmut Bergold
Neuhochstadter Str. 11
D-82234 Weßling
e-mail: harald.m.maier@web.de