

---

---

# Asymptotisches Verhalten der Lösungen inhomogener linearer Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

---

Ralf Guckel

Ralf Guckel promovierte im Jahr 2001 an der Universität Leipzig im Fach Mathematik. Danach war er mehrere Jahre im Management eines mittelständischen Unternehmens tätig. Im Jahr 2010 wechselte er als Dozent für Mathematik und Statistik an die Berufsakademie Sachsen.

## 1 Problemstellung

Gegeben seien eine reelle Zahlenfolge  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  sowie reelle Zahlen  $\beta, \gamma, s_0$  und  $s_1$ . Wir betrachten diejenige Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$ , die den folgenden Gleichungen genügt:

$$f_0 = s_0, \quad f_1 = s_1, \quad f_n = \alpha_n + \beta f_{n-1} + \gamma f_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2. \quad (1.1)$$

Mit (1.1) steht das Anfangswertproblem für die allgemeine lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung (bzw. im Fall  $\gamma = 0$  erster Ordnung) mit konstanten Koeffizienten im Mittelpunkt dieser Arbeit. Wir nehmen dabei im Folgenden stets an, dass die Voraussetzung

$$\beta \neq 0 \quad (1.2)$$

erfüllt ist. Im Fall  $\beta = 0$  (und  $\gamma \neq 0$ ) lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit separat auf die beiden vollständig entkoppelten Teilfolgen  $(f_{2n})_{n \geq 0}$  und  $(f_{2n+1})_{n \geq 0}$  anwenden.

Die Fibonacci-Folge  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  zählt neben den Primzahlen zu den am intensivsten studierten Zahlenfolgen überhaupt. Ihre Anziehungskraft verdankt sie unter anderem der berühmten „Regel vom Goldenen Schnitt“: Danach konvergiert der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen  $F_{n+1}/F_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Grenzwert  $(1 + \sqrt{5})/2$ . Eine Übertragung dieser Regel auf beliebige lineare (homogene) Rekursionen bereitet nur wenig Schwierigkeiten. In der Arbeit steht jedoch vor allem die folgende Frage im Vordergrund: Unter welchen Voraussetzungen und in welcher konkreten Gestalt lässt sich die „Regel vom Goldenen Schnitt“ auch auf inhomogene Rekursionen übertragen?

Neben  $(f_n)_{n \geq 0}$  betrachten wir auch die Lösungen  $(g_n)_{n \geq 0}$  und  $(h_n)_{n \geq 0}$  der folgenden Rekursionsbeziehungen:

$$g_0 = s_0, \quad g_1 = s_1, \quad g_n = \beta g_{n-1} + \gamma g_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2, \quad (1.3)$$

$$h_0 = 1, \quad h_1 = \beta, \quad h_n = \beta h_{n-1} + \gamma h_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2. \quad (1.4)$$

Die Zahlenfolge  $(g_n)_{n \geq 0}$  ist also die Lösung der zu (1.1) gehörenden homogenen Rekursion. Die Zahlenfolge  $(h_n)_{n \geq 0}$  lässt sich dagegen in einem gewissen Sinn als Fundamental- oder Grundlösung von (1.1) verstehen, wie wir später noch sehen werden.

Rekursionsgleichungen vom Typ (1.1) (und weitreichende Verallgemeinerungen davon) sind in sehr vielen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik anzutreffen. Einen guten Überblick über Theorie und Anwendungen von Differenzgleichungen im Allgemeinen vermitteln z.B. die Lehrbücher [9] und [14]. Das mathematische Interesse im Umfeld solcher Modelle konzentriert sich i. d. R. auf die folgenden drei Probleme:

(P.1) Herleitung einer expliziten Darstellungs- bzw. Lösungsformel, möglichst in „geschlossener“ Form.

(P.2) Nachweis der Stabilität oder Instabilität der Lösung.

(P.3) Untersuchung asymptotischer Eigenschaften der Lösung.

Für den ältesten und prominentesten Vertreter linearer Rekursionen, die klassische Fibonacci-Rekursion

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1.5)$$

ist eine explizite Lösungsdarstellung seit langem in Gestalt der Formel von Moivre–Binet bekannt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (1.6)$$

Mit Hilfe der Darstellungsformel (1.6) lassen sich zahlreiche interessante Aussagen über die Fibonacci-Folge  $(F_n)_{n \geq 0}$  beweisen. Beispielsweise bestehen die folgenden Grenzwertbeziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n} = 1. \quad (1.8)$$

Die Zahl  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  heißt „Goldener Schnitt“ und gemäß der „Regel vom Goldenen Schnitt“ (1.7) besitzt die Folge  $(F_n)_{n \geq 0}$  eine asymptotisch konstante Wachstumsrate. Man beachte, dass für beliebige (positive) Folgen  $(F_n)_{n \geq 0}$  aus (1.8) stets (1.7) folgt.

Die Problemstellungen (P.1) und (P.2) können für Rekursionen vom Typ (1.1) in einem gewissen Sinn als abschließend geklärt betrachtet werden. Mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen lässt sich die Lösung  $f$  von (1.1) als Faltungsprodukt  $f = h * \tilde{\alpha}$

darstellen mit  $\tilde{\alpha} = (s_0, s_1 - \beta s_0, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ . Die Lösung  $h$  von (1.4) kann explizit und in geschlossener Form angegeben werden. Gleiches gilt für die Lösung  $g$  der homogenen Rekursion (1.3). Aus Gründen der Vollständigkeit haben wir diese Verallgemeinerungen der Darstellungsformel von Moivre–Binet (1.6) in die Arbeit aufgenommen (Abschnitt 2). Daraus lassen sich dann auch die bekannten Aussagen zur Stabilität von  $h$ ,  $g$  und  $f$  rekonstruieren.

Die Arbeiten [2–4, 8, 10, 13, 15, 16, 21–23] befassen sich mit einigen Spezialfällen, in denen eine Lösungsdarstellung in geschlossener Form möglich ist. Die Inhomogenität wird darin beschrieben durch eine exponentielle, polynomielle oder faktoriell-polynomielle Folge. (In den Arbeiten [21, 22] werden allgemeinere Sätze zur Lösungsdarstellung bewiesen, konkrete Anwendungen bleiben dann jedoch wieder auf die bereits genannten Fälle beschränkt.)

Asymptotische Eigenschaften der Lösungen homogener Rekursionen mit (asymptotisch) konstanten Koeffizienten bilden den Gegenstand einer ganzen Reihe von Arbeiten von Poincaré [20], Perron [17, 18] und Birkhoff [7]. Darin werden die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}^{(k)}}{h_n^{(k)}}$  eines Systems von Fundamentallösungen  $h^{(k)}$  in Beziehung gesetzt zu den Nullstellen  $\lambda_k$  des zugrundeliegenden charakteristischen Polynoms. Vgl. dazu auch [9, Kap. 8].

Direkte Verallgemeinerungen der Arbeiten von Poincaré und Perron auf nicht-homogene Rekursionen finden sich z.B. in [1, 5, 12] und [19]. Allerdings schließen die darin formulierten Voraussetzungen an die (nichtlineare) Störung den vorliegenden Fall einer einfachen linearen Störung aus.

Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der inhomogenen Rekursion werden indirekt auch in den Arbeiten [6] und [11] untersucht. Darin wird u. a. gezeigt, dass für das Faltingsprodukt von Lösungen homogener Rekursionen unter bestimmten Voraussetzungen wieder eine Regel der Gestalt (1.7) erfüllt ist. In unserem Fall wird jedoch lediglich einer der beiden Faktoren durch eine Rekursion erzeugt.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht nun die Frage, unter welchen Bedingungen und in welcher konkreten Gestalt sich die Beziehungen (1.7), (1.8) auf die Lösung  $(f_n)_{n \geq 0}$  der allgemeinen linearen Rekursion (1.1) übertragen lassen. Die zur (teilweisen) Beantwortung dieser Frage verwendeten Methoden in Abschnitt 3 stammen im Wesentlichen aus der reellen Analysis. Sie sind keineswegs neu oder tieflegend. Allerdings finden sich einige der hier bewiesenen Resultate in dieser Form bislang nicht in der Literatur. Das betrifft vor allem die Ergebnisse für inhomogene Rekursionen.

## 2 Verallgemeinerung der Formel von Moivre–Binet

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die folgende quadratische Gleichung, die wir charakteristische Gleichung der Rekursionsbeziehung (1.1) nennen:

$$z^2 - \beta z - \gamma = 0. \quad (2.1)$$

Die beiden Lösungen  $\mu_1, \mu_2$  der charakteristischen Gleichung (2.1) heißen charakteristische Zahlen der Rekursionsbeziehung (1.1). Es gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  die folgende Beziehung:

$$1 - \beta z - \gamma z^2 = (1 - \mu_1 z)(1 - \mu_2 z). \quad (2.2)$$

Fall	Bedingungen an $\beta, \gamma$	Bedingungen an $\mu_1, \mu_2$
I	$\beta^2 + 4\gamma > 0$	$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1 \neq \mu_2$
II	$\beta^2 + 4\gamma = 0$	$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1 = \mu_2$
III	$\beta^2 + 4\gamma < 0$	$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mu_1 = \overline{\mu_2}$

Tabelle 1

Insbesondere gelten die Identitäten

$$\mu_1 + \mu_2 = \beta, \quad (2.3)$$

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -\gamma. \quad (2.4)$$

Die Nummerierung der beiden charakteristischen Zahlen soll o. B. d. A. so gewählt sein, dass  $\mu_1$  die betragsmäßig kleinere der beiden Zahlen darstellt:

$$|\mu_1| \leq |\mu_2|. \quad (2.5)$$

Die qualitativen und asymptotischen Eigenschaften der Lösungen  $(h_n)_{n \geq 0}$  und  $(g_n)_{n \geq 0}$  der Rekursionen (1.4) bzw. (1.3) hängen in erster Linie von den Koeffizienten  $\beta$  und  $\gamma$  ab, die ihrerseits mit den charakteristischen Zahlen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  im Zusammenhang stehen. Wir unterscheiden im Folgenden die drei Fälle I, II und III, vgl. Tabelle 1. In den Fällen I und II werden durch die Folgen  $(h_n)_{n \geq 0}$  und  $(g_n)_{n \geq 0}$  im Wesentlichen exponentielle Wachstums- und Abklingprozesse beschrieben, während der Fall III zu oszillierenden Folgen mit entweder konstanter oder exponentiell wachsender oder exponentiell fallender Amplitude führt. Die Einzelheiten sind in den beiden nachfolgenden Sätzen 1 und 2 zusammengefasst.

**Satz 1.** Für die durch die Rekursion (1.4) definierte Zahlenfolge  $(h_n)_{n \geq 0}$  gilt die folgende explizite Darstellung:

$$h_n = \begin{cases} \frac{\mu_2^{n+1} - \mu_1^{n+1}}{\mu_2 - \mu_1} & \text{im Fall I} \\ (n+1)\mu_1^n & \text{im Fall II} \\ |\mu_1|^n \frac{\sin(n+1)\varphi_1}{\sin \varphi_1} & \text{im Fall III} \\ \text{mit } \varphi_1 = \arg \mu_1 & \end{cases}$$

*Beweis.* Die Abschätzung  $|h_n| \leq (|\beta| + |\gamma|)^n$  gilt für alle  $n \geq 0$  und lässt sich direkt anhand der Rekursion (1.4) durch vollständige Induktion zeigen. Mithin ist die durch die Vorschrift

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \quad (2.6)$$

erklärte Funktion (die „erzeugende Funktion“ der Folge  $(h_n)_{n \geq 0}$ ) wohldefiniert in einer Umgebung des Nullpunktes  $z = 0$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} (1 - \beta z - \gamma z^2) h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z^n - \beta z^{n+1} - \gamma z^{n+2}) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (h_n - \beta h_{n-1} - \gamma h_{n-2}) z^n + h_0 + (h_1 - \beta h_0) z \\ &= h_0 + (h_1 - \beta h_0) z = 1 \end{aligned}$$

und somit

$$h(z) = \frac{1}{1 - \beta z - \gamma z^2}. \quad (2.7)$$

Wir entwickeln nun die rechte Seite der Beziehung (2.7) in eine Potenzreihe und bestimmen den Wert von  $h_n$  durch einen Koeffizientenvergleich. In den Fällen I und III gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  aus einer hinreichend kleinen Nullumgebung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \beta z - \gamma z^2} &\stackrel{\text{Fälle I, III}}{=} \frac{1}{(1 - \mu_1 z)(1 - \mu_2 z)} = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left( \frac{\mu_2}{1 - \mu_2 z} - \frac{\mu_1}{1 - \mu_1 z} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mu_2^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1^{n+1} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_2^{n+1} - \mu_1^{n+1}}{\mu_2 - \mu_1} z^n. \end{aligned}$$

Im Fall III schreiben wir  $\mu_1 = |\mu_1| e^{i\varphi_1}$  mit  $\varphi_1 = \arg \mu_1 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ . Daraus folgt  $\mu_2 = |\mu_1| e^{-i\varphi_1}$  und

$$\frac{\mu_2^{n+1} - \mu_1^{n+1}}{\mu_2 - \mu_1} \stackrel{\text{Fall III}}{=} |\mu_1|^n \frac{e^{-i(n+1)\varphi_1} - e^{i(n+1)\varphi_1}}{e^{-i\varphi_1} - e^{i\varphi_1}} = |\mu_1|^n \frac{\sin(n+1)\varphi_1}{\sin \varphi_1}.$$

Im Fall II gilt schließlich

$$\frac{1}{1 - \beta z - \gamma z^2} \stackrel{\text{Fall II}}{=} \frac{1}{(1 - \mu_1 z)^2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - \mu_1 z} = \sum_{n=1}^{\infty} n \mu_1^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mu_1^n z^n. \quad \square$$

**Satz 2.** Für die durch die Rekursionen (1.3) bzw. (1.1) definierten Zahlenfolgen  $(g_n)_{n \geq 0}$  und  $(f_n)_{n \geq 0}$  gelten für  $n \geq 2$  die folgenden expliziten Darstellungen:

$$g_n = s_0 h_n + (s_1 - \beta s_0) h_{n-1}, \quad (2.8)$$

$$f_n = g_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n-k} h_k. \quad (2.9)$$

*Beweis.* Wir setzen

$$\alpha_0 := s_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 := s_1 - \beta s_0 . \quad (2.10)$$

Wir nehmen zunächst an, dass die Voraussetzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < +\infty \quad (2.11)$$

erfüllt ist. Aus der Rekursionsbeziehung (1.3) folgt dann die Existenz einer Konstanten  $C > 0$  mit  $|f_n| \leq (C + |\beta| + |\gamma|)^n$  für alle  $n \geq 1$ . Somit sind die durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad \text{und} \quad \alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

erklärten Funktionen wohldefiniert in einer Umgebung von  $z = 0$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} (1 - \beta z - \gamma z^2) f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z^n - \beta z^{n+1} - \gamma z^{n+2}) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (f_n - \beta f_{n-1} - \gamma f_{n-2}) z^n + f_0 + (f_1 - \beta f_0) z \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n + s_0 + (s_1 - \beta s_0) z = \alpha(z) . \end{aligned}$$

Es ist also  $f(z) = \alpha(z)h(z)$  sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k} h_k \right) z^n .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert somit für alle  $n \geq 0$ :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k} h_k = s_0 h_n + (s_1 - \beta s_0) h_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n-k} h_k .$$

Damit ist – unter der zusätzlichen Voraussetzung (2.11) – bereits alles bewiesen, denn die Darstellungsformel für  $g$  ergibt sich als Spezialfall aus der Darstellungsformel für  $f$ . Die Voraussetzung (2.11) kann nachträglich fallen gelassen werden. Um die Darstellungsformeln (2.8), (2.9) etwa für einen Index  $n_0$  zu zeigen, kann das Erfülltsein von (2.11) durch den Übergang zur modifizierten Störung  $(\tilde{\alpha}_n)_{n \geq 2}$  mit  $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$  für  $n \leq n_0$  und  $\tilde{\alpha}_n = 0$  für  $n > n_0$  erzwungen werden. Die Folgen  $(f_n)_{n \geq 0}$ ,  $(g_n)_{n \geq 0}$  und  $(h_n)_{n \geq 0}$  bleiben bis zum Index  $n_0$  allesamt unverändert.  $\square$

Die in Satz 2 formulierte Darstellungsformel für  $f$  lässt sich unter Verwendung eines geeigneten diskreten Faltungsoperators  $\star$  kompakt wie folgt schreiben:

$$f = g + \alpha \star h .$$

Die Lösung  $f$  der inhomogenen Rekursion ergibt sich somit als Summe aus der Lösung  $g$  der homogenen Rekursion und einer Faltung der Störung  $\alpha$  mit der Fundamentallösung  $h$ . Für den Operator  $\star$  gilt  $(a \star b)_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k}$ . Ergänzt man die Inhomogenität  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  wie im Beweis von Satz 2 durch zwei Startwerte, vgl. (2.10), so nimmt die explizite Lösungsformel die folgende einfachere Gestalt an:

$$f = \alpha \star h .$$

Hierbei ist nun  $\star$  der gewöhnliche Faltungsoperator,  $(a \star b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Diese Überlegungen verdeutlichen die weitreichende Analogie zur Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Vgl. dazu auch die Darstellungen in [14, Kap. 3] und [9, Ch. 2].

### 3 Verallgemeinerung der Regel vom Goldenen Schnitt

Im Weiteren besteht unser Ziel zunächst darin, die Übertragbarkeit der Grenzwertbeziehung (1.7) auf die Folgen  $(h_n)_{n \geq 0}$  und  $(g_n)_{n \geq 0}$  zu prüfen. Die Ergebnisse finden sich in den Sätzen 3 und 4. Die Übertragbarkeit auf die Lösung  $(f_n)_{n \geq 0}$  der inhomogenen Rekursion (1.1) ist Gegenstand der nachfolgenden Sätze 5–8.

**Satz 3.** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0$$

ist  $h_n \neq 0$  für alle  $n \geq 0$  und es gilt die folgende Verallgemeinerung der Grenzwertbeziehung (1.7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \mu_2 .$$

*Beweis.* Im Fall  $\beta^2 + 4\gamma > 0$  gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\beta \neq 0$  mit  $q := \frac{\mu_1}{\mu_2} \in (-1, 1)$  folgendes:

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\mu_2^{n+2} - \mu_1^{n+2}}{\mu_2^{n+1} - \mu_1^{n+1}} = \mu_2 \cdot \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_2 .$$

Im Fall  $\beta^2 + 4\gamma = 0$  ist die Gültigkeit der Behauptung wegen

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{n+2}{n+1} \mu_1 = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \mu_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_2$$

ebenso offensichtlich. □

Die Voraussetzung  $\beta \neq 0$  schließt – wie bereits eingangs bemerkt – lediglich denjenigen Fall aus, bei dem sich die Folge in zwei entkoppelte Teilfolgen mit konstanter Wachstumsrate aufspaltet. In diesem Fall gilt (im Übrigen auch ohne die Voraussetzung  $\beta^2 + 4\gamma \geq 0$ ) für alle  $n \geq 0$ :

$$h_{2n} = \gamma^n, \quad h_{2n+1} = 0 .$$

**Satz 4.** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0$$

gilt für die Folge  $(g_n)_{n \geq 0}$  die folgende Verallgemeinerung der Grenzwertbeziehung (1.7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \begin{cases} \mu_2, & \text{falls } s_1 \neq \mu_1 s_0 \\ \mu_1, & \text{falls } s_1 = \mu_1 s_0 \neq 0 \end{cases}.$$

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $s_1 \neq \mu_1 s_0$  gilt. Wegen  $\mu_1 + \mu_2 = \beta$  ist das äquivalent zu  $s_0 \mu_2 + s_1 - \beta s_0 \neq 0$ . Zusammen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \mu_2 \neq 0$  folgt demzufolge  $g_n = s_0 h_n + (s_1 - \beta s_0) h_{n-1} \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ . Daraus wiederum folgt zusammen mit der Darstellung

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{s_0 h_{n+1} + (s_1 - \beta s_0) h_n}{s_0 h_n + (s_1 - \beta s_0) h_{n-1}} = \frac{h_n}{h_{n-1}} \cdot \frac{s_0 \cdot \frac{h_{n+1}}{h_n} + s_1 - \beta s_0}{s_0 \cdot \frac{h_n}{h_{n-1}} + s_1 - \beta s_0}$$

und Satz 3 sofort der erste Teil der Behauptung. Im zweiten Fall  $s_1 = \mu_1 s_0$  führt der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  aufgrund des unbestimmten Ausdrucks „ $\frac{0}{0}$ “ nicht unmittelbar zum Ziel. Wegen  $\mu_1 + \mu_2 = \beta$  und  $\mu_1 \mu_2 = -\gamma$  gilt aber

$$h_{n+1} = \beta h_n + \gamma h_{n-1} = (\mu_1 + \mu_2) h_n - \mu_1 \mu_2 h_{n-1},$$

und somit für alle  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= s_0 h_{n+1} + (s_1 - \beta s_0) h_n = s_0 h_{n+1} - \mu_2 s_0 h_n \\ &= s_0 (h_{n+1} - \mu_2 h_n) = s_0 \mu_1 (h_n - \mu_2 h_{n-1}) = \mu_1 g_n. \end{aligned}$$

Somit ist  $(g_n)_{n \geq 0}$  eine geometrische Folge, und aus der zusätzlichen Voraussetzung  $\mu_1 s_0 \neq 0$  ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Die beiden im letzten Satz ausgeschlossenen Fälle  $s_1 = s_0 = 0$  sowie  $s_1 = \mu_1 = 0$  führen zu  $g_n = 0$  für  $n \geq 1$ . Im Fall  $\beta = 0$  gilt indes (ohne weitere Voraussetzungen):

$$g_{2n} = s_0 \gamma^n, \quad g_{2n+1} = s_1 \gamma^n.$$

Bereits im vergleichsweise leicht zu behandelnden Fall der homogenen Rekursion (1.3) lässt sich also die Regel vom Goldenen Schnitt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \mu_2$  nicht in jedem Fall, sondern nur unter der zusätzlichen Voraussetzung  $s_1 \neq \mu_1 s_0$  anwenden. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist die klassische Regel vom Goldenen Schnitt durch eine andere Grenzwertbeziehung zu ersetzen.

Das qualitative und asymptotische Verhalten der Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  wird natürlich wesentlich von den Eigenschaften der Störung  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  beeinflusst. Entsprechende Aussagen lassen sich dann und nur dann aus der Lösungsformel (2.9) ableiten, wenn sich die darin auftretende Summe explizit auswerten, vereinfachen oder zumindest abschätzen lässt. Um



die Darstellung nicht unnötig zu verkomplizieren, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\alpha_0 := s_0, \quad \alpha_1 := s_1 - \beta s_0.$$

Einen ersten Einblick in die vorliegenden Verhältnisse geben die folgenden Überlegungen: Wenn der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{h_n}$  existiert und von Null verschieden ist, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{h_{n+1}} \cdot \frac{h_{n+1}}{h_n} \cdot \frac{h_n}{f_n}. \quad (3.1)$$

Für den somit zu untersuchenden Ausdruck  $\frac{f_n}{h_n}$  können wir schreiben:

$$\frac{f_n}{h_n} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{h_{n-k}}{h_n}.$$

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  verhält sich der Ausdruck  $\frac{h_{n-k}}{h_n}$  asymptotisch wie  $\mu_2^{-k}$ , wobei  $\mu_2$  die betragsmäßig größere der beiden charakteristischen Zahlen darstellt. Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mu_2^{-k}$  absolut gegen eine von Null verschiedene Zahl, so können wir daraus auf die Konvergenz des Ausdruckes  $\frac{f_n}{h_n}$  schließen. Der nachfolgende Satz präzisiert diese Überlegungen.

**Satz 5.** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0$$

sowie

$$\alpha_* := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < |\mu_2| \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \neq 0$$

gelten für die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  die folgenden Grenzwertbeziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \mu_2.$$

*Beweis.* Aufgrund der Beziehung (3.1) und den Voraussetzungen genügt es, die erste der beiden Grenzwertbeziehungen zu zeigen. Wir untersuchen die beiden Fälle I ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) und II ( $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ ) separat.

**Fall I:** Wegen  $\beta \neq 0$  gilt  $|\mu_1| < |\mu_2|$ . Mit  $q := \frac{\mu_1}{\mu_2} \in (-1, 1)$  gilt dann für die Fundamentalfolge  $h_n = \mu_2^n \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  sowie

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{h_n} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{h_{n-k}}{h_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q^{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-q^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} - q^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung konvergiert die unendliche Reihe  $\sum \frac{\alpha_k}{\mu_2^k}$  gegen eine von Null verschiedene Zahl. Um zum Grenzwert übergehen zu können, ist noch der kritische Term  $q^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k}$  für  $n \rightarrow \infty$  abzuschätzen. Mit  $\mu := \frac{\alpha_* + |\mu_2|}{2}$  gilt  $0 \leq \alpha_* < \mu < |\mu_2|$  sowie

$$\begin{aligned} \left| q^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \right| &\leq |q|^n \sum_{k=0}^n |\alpha_k| \frac{1}{|\mu_1|^k} \leq C |q|^n \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu}{|\mu_1|} \right)^k \\ &= C |q|^n \frac{1 - \left( \frac{\mu}{|\mu_1|} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\mu}{|\mu_1|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit im Fall I bewiesen.

**Fall II:** In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{h_n} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{h_{n-k}}{h_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k \alpha_k}{\mu_2^k}. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nunmehr in Analogie zum Fall I aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k \alpha_k}{\mu_2^k} \right| &\leq \frac{C}{n} \sum_{k=0}^n k \left( \frac{\mu}{|\mu_2|} \right)^k \\ &= \frac{C}{n} \cdot \frac{n \left( \frac{\mu}{|\mu_2|} \right)^{n+2} - (n+1) \left( \frac{\mu}{|\mu_2|} \right)^{n+1} + \left( \frac{\mu}{|\mu_2|} \right)}{\left( 1 - \left( \frac{\mu}{|\mu_2|} \right) \right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

Man prüft leicht nach, dass die Bedingung  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \neq 0$  in Satz 5 die direkte Verallgemeinerung der Bedingung  $s_1 \neq \mu_1 s_0$  aus Satz 4 darstellt.

Im Fall  $|\alpha_*| > |\mu_2|$  darf vermutet werden, dass das Wachstumsverhalten der Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  durch das Wachstumsverhalten der Störung  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  dominiert wird. Eine Grenzwertbeziehung der Gestalt (1.7) setzt dann allerdings mindestens eine entsprechende Grenzwertbeziehung für die Störung voraus, weshalb wir fortan die folgende „schärfere“ Definition der Zahl  $\alpha_*$  verwenden:

$$\alpha_* := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

Es wird stets angenommen, dass dieser Grenzwert im eigentlichen Sinn existiert. Insbesondere sei  $\alpha_n \neq 0$  für fast alle  $n$ .

**Satz 6.** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0$$

sowie

$$|\alpha_*| > |\mu_2|$$

gelten für die Lösung  $(f_n)_{n \geq 0}$  von (1.1) die folgenden Grenzwertbeziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\alpha_n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha_*.$$

*Beweis.* Aufgrund der Beziehung

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \cdot \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n}{f_n}$$

genügt es zu zeigen, dass die erste der beiden Grenzwertbeziehungen erfüllt ist. Dazu zerlegen wir

$$\frac{f_n}{\alpha_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} h_k = \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right) h_k + \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right)^k \frac{h_k}{\mu_2^k}. \quad (3.2)$$

Der zweite Summand konvergiert gegen eine von Null verschiedene reelle Zahl, da aufgrund der Voraussetzungen einerseits  $\left| \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right| < 1$  gilt und andererseits der Bruch  $\frac{h_k}{\mu_2^k}$  höchstens linear mit  $k$  wächst. Genauer gelten mit  $q = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  die bereits im Beweis von Satz 5 ausgenutzten Beziehungen  $\frac{h_k}{\mu_2^k} = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$  (im Fall I,  $\mu_1 \neq \mu_2$ ) bzw.  $\frac{h_k}{\mu_2^k} = k+1$  (im Fall II,  $\mu_1 = \mu_2$ ). Daraus folgt im Fall I

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right)^k \frac{h_k}{\mu_2^k} &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right)^k - \frac{q}{1-q} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu_1}{\alpha_*} \right)^k \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}} - \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)} \neq 0 \end{aligned}$$

und im Fall II

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)^k \frac{h_k}{\mu_2^k} &= \frac{d}{d\left(\frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)} \left( \sum_{k=0}^n \left(\frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)^{k+1} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{d\left(\frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)} \left( \frac{\frac{\mu_2}{\alpha_*}}{1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der erste Summand in der Zerlegung (3.1) für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Hierfür wiederum ist es hinreichend, zu zeigen dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left| \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right| |\mu_2|^k = 0.$$

Wir wählen dazu eine positive reelle Zahl  $\varepsilon$ , für die gilt:

$$0 < \left| \frac{1}{\alpha_*} \pm \varepsilon \right| < \frac{1}{|\mu_2|} \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{\alpha_*} \pm \varepsilon \right) = \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{\alpha_*} \right).$$

Weiterhin bestimmen wir eine natürliche Zahl  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , für die gilt:

$$\frac{1}{\alpha_*} - \varepsilon < \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < \frac{1}{\alpha_*} + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Es sei zunächst  $\alpha_* > 0$ . Dann folgt aus der letzten Abschätzung durch Aufspaltung des Bruches  $\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}$  in ein Teleskopprodukt mit  $k$  Faktoren:

$$0 < \left( \frac{1}{\alpha_*} - \varepsilon \right)^k < \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} < \left( \frac{1}{\alpha_*} + \varepsilon \right)^k \quad \text{für alle } k \leq n - n_0 + 1.$$

Daraus wiederum ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right| \leq \left| \left( \frac{1}{\alpha_*} + \varepsilon \right)^k - \left( \frac{1}{\alpha_*} - \varepsilon \right)^k \right| \quad \text{für alle } k \leq n - n_0 + 1,$$

die man ebenso auch im Fall  $\alpha_* < 0$  zeigt. Wir setzen

$$q_1 := \min \left\{ \left| \frac{1}{\alpha_*} - \varepsilon \right|, \left| \frac{1}{\alpha_*} + \varepsilon \right| \right\}, \quad q_2 := \max \left\{ \left| \frac{1}{\alpha_*} - \varepsilon \right|, \left| \frac{1}{\alpha_*} + \varepsilon \right| \right\}.$$

Dann gilt  $0 < q_1 < q_2 < \frac{1}{\mu_2}$  und für  $k \leq n - n_0 + 1$  gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right| \leq |q_1^k - q_2^k| \leq k \cdot q_2^k \cdot \left| 1 - \frac{q_1}{q_2} \right| = 2 \cdot k \cdot \varepsilon \cdot q_2^{k-1}.$$

Multiplikation mit  $|\mu_2|^k$  und Summation über  $k = 0, 1, \dots, n - n_0 + 1$  ergibt schließlich

$$\sum_{k=0}^{n-n_0+1} \left| \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right| |\mu_2|^k \leq 2\varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-n_0+1} k \cdot q_2^{k-1} |\mu_2|^k$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2\varepsilon |\mu_2|}{(1 - q_2 |\mu_2|)^2}.$$

Andererseits gilt

$$\sum_{k=n-n_0+2}^n \left| \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right| |\mu_2|^k = \sum_{l=0}^{n_0-2} \left| \frac{\alpha_l}{\alpha_{n_0-1}} \cdot \frac{\alpha_{n_0-1}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^{n-l}} \right| |\mu_2|^{n-l}$$

$$\leq \left| \frac{\alpha_{n_0-1}}{\alpha_n} \right| \cdot |\mu_2|^n \cdot \sum_{l=0}^{n_0-2} \left| \frac{\alpha_l}{\alpha_{n_0-1}} \right| \cdot |\mu_2|^{-l} + \left| \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right|^n \cdot \sum_{l=0}^{n_0-2} \left| \frac{\alpha_*}{\mu_2} \right|^l$$

$$= |\alpha_{n_0-1}| \underbrace{\left( \frac{\mu_2}{\sqrt[n]{|\alpha_n|}} \right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0} \cdot \sum_{l=0}^{n_0-2} \left| \frac{\alpha_l}{\alpha_{n_0-1}} \right| \cdot \mu_2^{-l} + \underbrace{\left| \frac{\mu_2}{\alpha_*} \right|^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0} \cdot \sum_{l=0}^{n_0-2} \left| \frac{\alpha_*}{\mu_2} \right|^l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Da die Zahl  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung.  $\square$

Wir wenden uns nunmehr demjenigen „Ausnahmefall“ in Satz 5 zu, bei dem die unendliche Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k}$  gegen Null konvergiert.

**Satz 7.** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0 \quad \text{sowie} \quad |\alpha_*| < |\mu_1| \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} = 0$$

und ferner

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \neq 0 \quad \text{im Fall I,} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha_k}{\mu_1^k} \neq 0 \quad \text{im Fall II}$$

gelten für die Lösung  $(f_n)_{n \geq 0}$  von (1.1) die folgenden Grenzwertbeziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\mu_1^n} = \begin{cases} -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} & \text{im Fall I} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha_k}{\mu_1^k} & \text{im Fall II} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \mu_1.$$

*Beweis.* Es genügt, die erste der beiden Grenzwertbeziehungen zu zeigen. Wie bereits beim Beweis von Satz 5 müssen auch hier die beiden Fälle I und II gesondert betrachtet werden.

Fall I: Wir zerlegen

$$\frac{f_n}{\mu_1^n} = \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \right].$$

Der zweite Summand innerhalb der Klammer konvergiert gegen eine – laut Voraussetzung von Null verschiedene – reelle Zahl. Wir zeigen, dass der erste Summand gegen Null konvergiert. Wir wählen dazu eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  sowie eine natürliche Zahl  $k_0 = k_0(\varepsilon)$ , für die gilt:

$$\left| \frac{\alpha_{1+k}}{\alpha_k} \right| \leq |\alpha_*| + \varepsilon < |\mu_1| \quad \text{für } k \geq k_0,$$

daraus folgt dann

$$\left| \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k} \right| \leq (|\alpha_*| + \varepsilon)^n < |\mu_1|^n \quad \text{für } k \geq k_0, n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit lässt sich der kritische Term

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} &= - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} = - \left( \frac{1}{\mu_1} \right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k}}{\mu_2^k} \\ &= - \left( \frac{1}{\mu_1} \right)^n \left[ \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{\alpha_{n+k}}{\mu_2^k} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k}}{\mu_2^k} \right] \end{aligned}$$

wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \right| &\leq \left| \frac{1}{\mu_1} \right|^n \left[ \sum_{k=1}^{k_0-1} \left| \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_{k_0}} \right| \cdot \left| \frac{\alpha_{k_0}}{\mu_2^k} \right| + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k} \right| \cdot \left| \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \right| \right] \\ &\leq \left| \frac{1}{\mu_1} \right|^n \left[ \sum_{k=1}^{k_0-1} (|\alpha_*| + \varepsilon)^{n+k-k_0} \cdot \left| \frac{\alpha_{k_0}}{\mu_2^k} \right| + (|\alpha_*| + \varepsilon)^n \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \right| \right] \\ &= \left( \frac{|\alpha_*| + \varepsilon}{|\mu_1|} \right)^n \left[ \sum_{k=1}^{k_0-1} (|\alpha_*| + \varepsilon)^{k-k_0} \cdot \left| \frac{\alpha_{k_0}}{\mu_2^k} \right| + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Fall II: Der Beweis kann in Analogie zum Fall I geführt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{\mu_1^n} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (n-k+1) \mu_1^{-k} \\ &= (n+1) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} - \sum_{k=0}^n \frac{k \alpha_k}{\mu_1^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \alpha_k}{\mu_1^k}. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 8:** Unter den Voraussetzungen

$$\beta^2 + 4\gamma \geq 0, \quad \beta \neq 0$$

sowie

$$|\mu_1| < |\alpha_*| < |\mu_2| \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} = 0$$

gelten für die Lösung  $(f_n)_{n \geq 0}$  von (1.1) die folgenden Grenzwertbeziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\alpha_n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha_*.$$

*Beweis.* Auch in diesem Fall genügt wiederum der Beweis der ersten Grenzwertbeziehung. Aus den Voraussetzungen folgt zudem, dass der andernorts separat zu behandelnde Fall II entfällt. Mit  $q := \frac{\mu_1}{\mu_2}$  zerlegen wir

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{\alpha_n} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{h_{n-k}}{\alpha_n} = \frac{1}{1-q} \frac{\mu_2^n}{\alpha_n} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} - q^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \right] \\ &= \frac{1}{1-q} \left[ \frac{\mu_2^n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1^n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} \right] \end{aligned}$$

und betrachten die beiden Summanden innerhalb der eckigen Klammer separat. Mit Überlegungen, die denjenigen im Beweis von Satz 7 gleichen, finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2^n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} &= -\frac{\mu_2^n}{\alpha_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu_2^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_n} \frac{1}{\mu_2^k} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_n} - \alpha_*^k \right) \frac{1}{\mu_2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_*}{\mu_2} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha_*}{\mu_2}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1^n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\mu_1^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} \mu_1^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_*^k} \right) \mu_1^k + \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mu_1}{\alpha_*} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}}. \end{aligned}$$

Es gilt demzufolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\alpha_n} = \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}} \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha_*}{\mu_2}} - \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}} \right] = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha_*}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu_2}{\alpha_*}\right)}.$$

Damit ist der Beweis vollständig.  $\square$

## Literatur

- [1] R. Abu-Saris, S. Elaydi, S. Jang: *Poincaré type solutions of systems of difference equations*. J. Math. Anal. Appl. **275** (2002), 69–83.
- [2] A. Andrade, S.P. Pethe: *On the  $r$ th-Order Nonhomogeneous Recurrence Relation and Some Generalized Fibonacci Sequences*. The Fibonacci Quarterly **30** (1992), 256–262.
- [3] P.R.J. Asveld: *A Family of Fibonacci-Like Sequences*. The Fibonacci Quarterly **25** (1987), 81–83.
- [4] P.R.J. Asveld: *Another Family of Fibonacci-Like Sequences*. The Fibonacci Quarterly **25** (1987), 361–364.
- [5] Z. Benzaid, D.A. Lutz: *Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations*. Stud. Appl. Math. **77** (1987), 195–221.
- [6] G.E. Bergum, V.E. Hoggatt, jr.: *Limits of Quotients for the Convolved Fibonacci Sequence and Related Sequences*. The Fibonacci Quarterly **15** (1977), 113–116.
- [7] G.D. Birkhoff: *General Theory of Linear Difference Equations*. Transactions of the Am. Math. Soc. **12** (1911), 243–284.
- [8] G.B. Djordjević: *Some Properties of the Sequences  $C_{n,3} = C_{n-1,3} + C_{n-3,3} + r$* . The Fibonacci Quarterly **43** (2005), 202–207.
- [9] S. Elaydi: *An Introduction To Difference Equations*. Springer, 3rd. ed. 2005.
- [10] P. Filipponi, G. Fierro: *On the Sequences  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + hn + k$* . The Fibonacci Quarterly **37** (1999), 326–332.
- [11] V.E. Hoggatt, jr., K. Alladi: *Limiting Ratios of Convolved Recursive Sequences*. The Fibonacci Quarterly **15** (1977), 211–214.
- [12] K. Iwasaki: *Asymptotic Analysis for Linear Difference Equations*. Transactions of the Am. Math. Soc. **349** (1997), 4107–4142.
- [13] M.S. Klamkin: *On Solving Non-Homogeneous Linear Difference Equations*. The Fibonacci Quarterly **11** (1973), 166–168.
- [14] U. Krause, T. Nesemann: *Differenzgleichungen und diskrete dynamische Systeme*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2. Aufl. 2012.
- [15] J.Y. Lee: *Some Basic Linear Properties of the Second-Order Inhomogeneous Line-Sequence*. The Fibonacci Quarterly **35** (1997), 111–121.
- [16] H.N. Malik: *On the Solution of  $\{E^2 + (\lambda p - 2)E + (1 - \lambda p - \lambda^2 p)\}^m G_n = n^k$  by Expansions and Operators*. The Fibonacci Quarterly **21** (1983), 260–265.
- [17] O. Perron: *Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen*. Math. Z. **6** (1920), 161–166.
- [18] O. Perron: *Über Summgleichungen und Poincarésche Differenzgleichungen*. Math. Ann. **84** (1921), 1–18.
- [19] M. Pituk: *More on Poincaré’s and Perron’s Theorems for difference equations*. J. Difference Equ. Appl. **8** (2002), 201–216.
- [20] H. Poincaré: *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*. Amer. J. Math. **7** (1885), 203–258.
- [21] R.B. Taher, M. Mouline, M. Rachidi: *General Nonhomogeneous Recurrence Relations of Order  $r$  by a Linearization Method and an Application to Polynomial and Factorial Polynomial Cases*. The Fibonacci Quarterly **40** (2002), 79–84.
- [22] B.E. Wahbi, M. Mouline, M. Rachidi: *Nonhomogeneous Recurrence Relations of Order  $r$  by Matrix Methods*. The Fibonacci Quarterly **40** (2002), 106–117.
- [23] R.J. Weinschenk, V.E. Hoggatt, jr.: *Solving  $C_{n+2} = C_{n+1} + C_n + n^m$  by Expansions and Operators*. The Fibonacci Quarterly **8** (1970), 39–48, 60.

Dr. Ralf Guckel  
Berufsakademie Sachsen  
Staatliche Studienakademie Leipzig  
Schönauer Straße 113a  
D-04207 Leipzig  
e-mail: ralf.guckel@ba-leipzig.de