
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2014 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1326: Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise, dass für alle nichtnegativen ganzzahligen k gilt:

$$(a + b + c) \left(\frac{a}{b(kc + a)} + \frac{b}{c(ka + b)} + \frac{c}{a(kb + c)} \right) \geq \frac{9}{k + 1}.$$

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, SRB

Aufgabe 1327: Im allgemeinen Dreieck seien a, b, c die Seitenlängen, s der halbe Umfang, und R, r der Um- bzw. Inkreisradius, F die Fläche, $E = (2a^2 - (b - c)^2)(2b^2 - (c - a)^2)(2c^2 - (a - b)^2)$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{4F} \sqrt{\frac{E}{2}} \leq R + 2r$$

mit Gleichheit für das gleichschenklige Dreieck.

Peter Nüesch, Lausanne, CH

Aufgabe 1328 (Die einfache dritte Aufgabe): Adjungiert man zum Körper $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ (rechnen modulo 3) das Element $\sqrt{2}$, so erhält man den endlichen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3(\sqrt{2}) = GF(9)$, also ein Galois-Feld mit 9 Elementen.

Wieviele normierte quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{K}$ kann man aufzählen, und wieviele davon besitzen in \mathbb{K} eine Lösung?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2013

Aufgabe 1314. Man beweise für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ mit $x + y + z = 1$ und für alle $a \in [0, 2]$ die Ungleichung

$$0 \leq xy + yz + zx - axyz \leq \frac{9-a}{27}.$$

Dieter Rüthing, Paderborn, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 19 Leser sandten Lösungen ein: Ulrich Abel (Friedberg, D), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der Lösung von *Peter Bundschuh*, der die Aufgabe analytisch löst. Er (und auch andere Leser) zeigen, dass die Ungleichungen sogar für $a \in [0, \frac{9}{4}]$ gilt.

Wir wollen

$$F(x, y, z) = xy + yz + zx - axyz$$

zunächst auf dem eindimensionalen Rand des im ersten Oktanten des \mathbb{R}^3 gelegenen Teils der Ebene $x + y + z = 1$ untersuchen, der ein gleichseitiges Dreiecks darstellt. Auf diesem Rand ist mindestens eines der x, y, z gleich Null, etwa $z = 0$ und daher $x + y = 1$, also

$$F(x, y, 0) = xy = x(1-x) \in [0, \frac{1}{4}].$$

Somit gilt $F(x, y, z) \in [0, \frac{1}{4}]$ auf dem ganzen Rand des Dreiecks.

Im Dreiecksmittelpunkt gilt $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{9-a}{27}$ und dies ist $\geq \frac{1}{4}$ genau dann, wenn $a \leq \frac{9}{4}$ gilt; diese Bedingung stellen wir an a in unserer modifizierten Aufgabenstellung.

Würde F auf dem Dreieck negative Werte oder Werte $> \frac{9-a}{27}$ annehmen, so kann dies nur in inneren, vom Mittelpunkt verschiedenen Punkten des Dreiecks geschehen. Das bedeutet, dass F im ersten bzw. zweiten Fall auf dem Dreieck sein Minimum bzw. Maximum in einem inneren Punkt $(x_0, y_0, z_0) \neq (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ annimmt. Auf Grund der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel gibt es dann ein reelles λ so, dass gleichzeitig die Gleichungen

$$y_0 + z_0 - ay_0z_0 = \lambda, \quad z_0 + x_0 - az_0x_0 = \lambda, \quad x_0 + y_0 - ax_0y_0 = \lambda$$

erfüllt sind. Da nicht alle Zahlen x_0, y_0, z_0 einander gleich sein können, sei etwa $y_0 \neq z_0$. Subtrahiert man die dritte von der zweiten Gleichung, so entsteht

$$z_0 - y_0 = ax_0(z_0 - y_0) \Leftrightarrow ax_0 = 1 \Rightarrow F(x_0, y_0, z_0) = x_0(y_0 + z_0) = x_0(1 - x_0) \in (0, \frac{1}{4}],$$

wobei letzteres sowohl $F(x_0, y_0, z_0) < 0$ als auch $F(x_0, y_0, z_0) > \frac{9-a}{27}$ widerspricht.

Bemerkungen: Für $a = \frac{9}{4}$ ergibt sich Aufgabe 1290 aus den Elementen, wie ein Löser bemerkte, und für $a = 2$ ergibt sich Aufgabe 1 der Internationalen Mathematik Olympiade

1984 (IMO 1984), wie der Verfasser selber angab. Ausserdem erschien eine vollständige Lösung des Problems von *Mitsuhiro Kumano* in der *Mathematical Gazette* (Math. Gaz. 95 (2011)), wie der vorher erwähnte Leser ebenfalls angab.

Aufgabe 1315. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \sum_{j=k}^{kl} c_j(k, l) \binom{x}{j}$$

mit $k, l \in \mathbb{N}$ und den Koeffizienten

$$c_j(k, l) = \sum_{i=k}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \binom{i}{k}^l.$$

Man zeige, dass $f(x) = \binom{x}{k}^l$ gilt.

Friedhelm Götze, Jena, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Beiträge eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Fritz Siegerist (Küsnacht, CH).

Wir folgen der Lösung von *Ulrich Abel*, die fast mit der von *Frieder Grupp* identisch ist.

Wir vertauschen die Summationsreihenfolge

$$f(x) = \sum_{i=k}^{kl} \binom{i}{k}^l \sum_{j=i}^{kl} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \binom{x}{j}$$

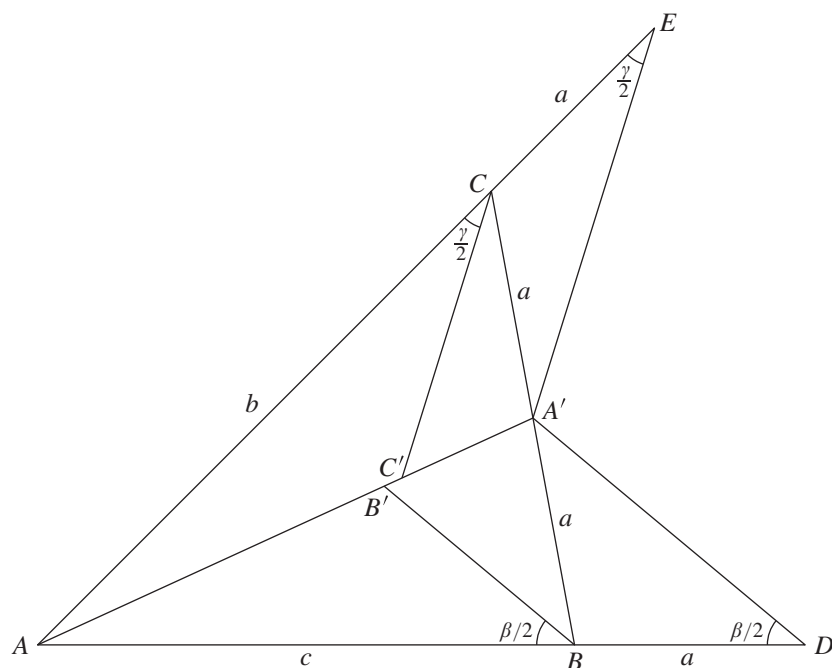
und berechnen $f(x)$ für ganzzahlige Werte $x = m \in \{k, \dots, kl\}$. Die innere Summe ergibt Null, falls $m < i$, und ansonsten folgt unter der Verwendung der Identität $\binom{m}{j} \binom{j}{i} = \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{kl} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \binom{m}{j} &= \binom{m}{i} \sum_{j=i}^m (-1)^{j-i} \binom{m-i}{j-i} \\ &= \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \binom{m-i}{j} = \begin{cases} 0, & \text{falls } m > i \\ 1, & \text{falls } m = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Daher gilt

$$f(m) = \binom{m}{k}^l \quad \text{für alle } m \in \{0, \dots, kl\},$$

denn man sieht sofort $f(m) = 0$ für $0 \leq m < k$. Da sowohl $f(x)$ als auch $\binom{x}{k}^l$ Polynome vom Höchstgrad kl in der Variablen x sind, die an $kl + 1$ Stellen übereinstimmen, müssen sie identisch sein.



Aufgabe 1316 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Winkelhalbierenden der Winkel β und γ des Dreiecks ABC schneiden die Seitenhalbierende AA' in den Punkten B' und C' . Zeige, dass aus $BB' = CC'$ die Gleichheit $AB = AC$ folgt.

Sadi Abu-Saymeh und Mowaffaq Hajja, Irbid, JOR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von 14 Lesern sind Beiträge eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während einige Löser mehr geometrisch argumentieren und die Kontraposition beweisen, kommen andere rein rechnerisch mit Hilfe von Sinus- und Cosinussatz ans Ziel. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*, dessen Lösung zur ersten Sorte gehört.

Man zeigt: Ist $b > c$ und somit $\beta > \gamma$, so ist auch $BB' < CC'$.

Dazu verlängert man AB zu AD und AC zu AE mit $BD = CE = a = BA' = A'C$. Es ist wegen $\angle DBA' < \angle ECA'$ auch $DA' < EA'$ und $\frac{c}{a+c} = 1 - \frac{a}{a+c} < 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$, und somit

$$BB' = DA' \cdot \frac{c}{a+c} < EA' \cdot \frac{b}{a+b} = CC'.$$