

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2015 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1329:** Man bestimme die kleinste positive Zahl  $K$  so, dass die Ungleichung

$$\left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) (a-bc)(b-ca)(c-ab) \leq Kabc$$

für alle positiven Zahlen  $a, b, c$  mit  $a + b + c = 1$  gültig ist.

Orif Ibrogimov, Bern, CH

**Aufgabe 1330:** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit  $b \neq c$  und  $D, E$  auf der Seite  $BC$  so, dass  $AD$  die Winkelhalbierende von  $\alpha$  und  $\frac{BE}{EC} = \frac{b}{c}$  ist. Weiter seien  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte mit  $PD = AD$ ,  $QE = AE$  und  $BP \neq AB \neq BQ$ . Schliesslich seien  $BP = p$ ,  $CP = q$ ,  $BQ = r$  und  $CQ = s$ . Man zeige dass

- a)  $c(r^2 + q^2) + b(s^2 + p^2) = (b+c)(b^2 + c^2)$  und  
b)  $QE > PD$ .

Indika Shameera Amarasinghe, Nawal, CL

**Aufgabe 1331 (Die einfache dritte Aufgabe):** Seien  $F$  und  $G$  komplexe Matrizen mit  $F = FGF$ . Zeige, dass dann  $\text{rg}(F) = \text{rg}(GFG)$  gilt, wobei  $\text{rg}(\cdot)$  den Rang einer Matrix bezeichnet.

Oskar Maria Baksalary, Poznań, PL und Götz Trenkler, Dortmund, D

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2013

**Aufgabe 1317.** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sec^4 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{8}{3} n(n+1)(n^2+n+1).$$

Michael Vowe, Therwil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Lösungen von 7 Lesern eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D) und Walther Janous (Innsbruck, A).

Die eingegangenen Lösungen hängen von den verwendeten Identitäten aus der einschlägigen Literatur ab. Andere Löser betrachten Verallgemeinerungen des Problems, was den Exponenten 4 der Summanden betrifft. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*.

Wir brauchen folgendes, leicht zu prüfende Resultat: Sind  $y_0, y_1, \dots, y_k$  beliebige Zahlen und  $\sigma_j = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_j}$ , so gilt

$$\sum_{i=0}^k y_i^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1 \sigma_3 - 4\sigma_4. \quad (1)$$

Es sei  $y_i = \sec((2i+1)\alpha)$  mit  $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$ ,  $i = 0, \dots, 2n$ . Insbesondere gilt  $y_n = -1$  und  $y_i = y_{2n-i}$ . Da  $\sec(2j\alpha) = -\sec((2n+1-2j)\alpha) = -y_{n-j}$  gilt nun

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sec^4(k\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i^4 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{2n} y_i^4 - 1 \right). \quad (2)$$

Sei weiter  $P$  das Polynom

$$P(x) = \sum_{m=0}^n \binom{2n+1}{2m} x^{2(n-m)+1} (-1)^m (1-x^2)^m.$$

Wegen  $\cos((2n+1)t) = \operatorname{Re}((\cos(t) + i \sin(t))^{2n+1})$  gilt  $P(\cos(t)) = \cos((2n+1)t)$ , daher  $\sin(t)P'(\cos(t)) = (2n+1)\sin((2n+1)t)$ . Ist also  $x_i = \cos((2i+1)\alpha)$  für  $0 \leq i \leq n$ , so ist  $P(x_i) = -1$  und für  $i \neq n$  ist  $P'(x_i) = 0$ , d.h.  $x_i = x_{2n-i}$  ist doppelte Nullstelle von

$$\begin{aligned} P(x) + 1 &= 1 + (-1)^n (2n+1)x(1-x^2)^n + (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{3} x^3(1-x^2)^{n-1} + x^5(\dots) \\ &= 1 + (-1)^n (2n+1)x + (-1)^{n-1} x^3 \left( (2n+1)n + \frac{1}{3}(2n+1)n(2n-1) \right) + x^5(\dots). \end{aligned}$$

Die  $y_i = \frac{1}{x_i}$  sind dann Nullstellen von

$$\begin{aligned} Q(y) &= y^{2n+1} \left( P\left(\frac{1}{y}\right) + 1 \right) \\ &= y^{2n+1} + (-1)^n (2n+1)y^{2n} + (-1)^{n-1} \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)y^{2n-2} + y^{2n-4}(\dots). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Vieta

$$\sigma_1 = (-1)^{n+1}(2n+1), \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = (-1)^n \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1), \quad \sigma_4 = 0$$

und weiter mit (1)

$$\sum_{i=0}^{2n} y_i^4 = (2n+1)^4 - \frac{8}{3}(2n+1)^2 n(n+1) = \frac{16}{3}(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) + 1$$

und schliesslich mit (2)

$$S_n = \frac{8}{3}(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = \frac{8}{3}n(n+1)(n^2 + n + 1).$$

**Aufgabe 1318.** Seien  $R$  und  $r < R$  die Radien zweier Kreise, die sich von innen berühren. Die Sehne  $AC$  des grösseren Kreises berühre den kleineren Kreis im Punkt  $B$ . Beweise, dass

$$\frac{AC}{2\sqrt{AB \cdot BC}} < \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Yagub N. Aliyev, Khyrdalan, AZ

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 20 Leser haben Lösungen eingesandt: Georghe Bercea (München, D), Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Gerhard Wanner (Genève CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser arbeiten in einem Koordinatensystem und mit mehr oder weniger trigonometrischen Hilfsmitteln. *Georghe Bercea* kommt mit elementaren Mitteln aus.

Es sei  $B'$  der Berührungspunkt der Kreise  $k$  (Mittelpunkt  $M$ , Radius  $R$ ) und  $k'$  (Mittelpunkt  $M'$ , Radius  $r$ ). Es sei weiter (siehe Figur)

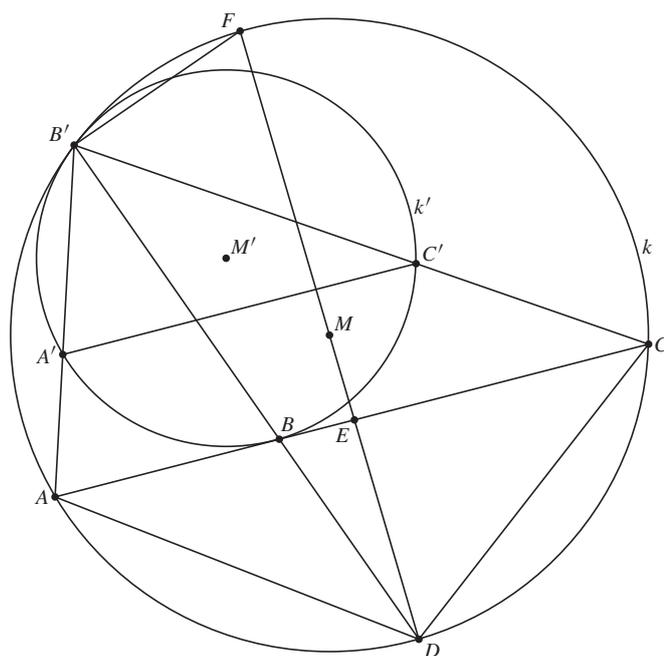
$$A' = B'A \cap k', \quad C' = B'C \cap k', \quad D = B'B \cap k, \quad E = AC \cap MD, \quad F = MD \cap k.$$

$B'$  ist das Ähnlichkeitszentrum der Kreise  $k$  und  $k'$ . Daraus folgt, dass  $A'C'$  und  $AC$  parallel sind,  $B'B$  die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle AB'C$  ist und damit  $AD = CD$  folgt. Mit

$$\frac{R}{r} = \frac{B'D}{B'B} \quad \text{und dem Sehnensatz} \quad AB \cdot BC = B'B \cdot BD$$

schreibt sich die Ungleichung der Aufgabe wie folgt:

$$\frac{AC}{2\sqrt{B'B \cdot BD}} < \sqrt{\frac{B'D}{B'B}} \quad \text{oder} \quad AC < 2\sqrt{B'D \cdot BD}. \quad (1)$$



Die zwei rechtwinkligen, ähnlichen Dreiecke  $DB'F$  und  $DEB$  liefern  $B'D \cdot BD = FD \cdot ED$  und aus dem rechtwinkligen Dreieck  $DCF$  folgt mittels Kathetensatz  $FD \cdot ED = CD^2$ . Damit wird (1) zur Dreiecksungleichung

$$AC < 2CD = AD + CD.$$

**Aufgabe 1319 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die Felder eines  $n \times n$ -Quadrats seien so mit den Ziffern 1 bis 9 belegt, dass alle Zeilen- und Spaltensummen ungerade sind. Für  $n = 3$  und  $n = 4$  bestimme man die Anzahl solcher Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 11 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Karl Stoop (Stetten, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D),

Während für den Fall  $n = 3$  bei den Lösern grosse Einigkeit herrschte, gingen für  $n = 4$  die Meinungen auseinander. Es ist allen klar, dass man die Aufgabe zuerst modulo 2 (gerade, ungerade) lösen muss. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*.

Wir bestimmen zunächst, auf wieviele Möglichkeiten die Quadrate mit einer geraden ( $g$ ) bzw. einer ungeraden ( $u$ ) Ziffer belegt werden können.

$n = 3$ : Dann müssen in jeder Zeile und Spalte eine oder drei ungerade Zahlen stehen. Hieraus schliesst man leicht, dass 9, 5 oder 3 Felder des Quadrats mit  $u$  belegt sein müssen.

Sind alle 9 Felder mit  $u$  belegt, so gibt es offensichtlich eine Möglichkeit.

Sind genau 5 Felder mit  $u$  belegt, so müssen genau eine Zeile und eine Spalte nur mit  $u$  belegt sein. Dafür gibt es genau 9 Möglichkeiten.

Sind genau 3 Felder mit  $u$  belegt, so muss in jeder Zeile und Spalte genau ein Feld mit  $u$  belegt sein. Hierfür gibt es  $3!$  Möglichkeiten.

Da laut Aufgabenstellung 5 ungerade und 4 gerade Ziffern pro Feld zur Verfügung stehen, gibt es insgesamt

$$5^9 + 9 \cdot 5^5 \cdot 4^4 + 6 \cdot 5^3 \cdot 4^6 = 12\,225\,125$$

Möglichkeiten, die Felder wie verlangt zu besetzen.

$n = 4$ : Dann müssen in jeder Zeile und Spalte ein oder drei  $u$  stehen. Hieraus schliesst man leicht, dass 12, 10, 8, 6 oder 4 Felder des Quadrats mit  $u$  belegt sein müssen.

Im Falle von 4  $u$  gibt es  $4!$  Möglichkeiten, da in jeder Spalte und jeder Zeile genau ein Feld mit  $u$  belegt sein muss. Ähnlich ist der Fall mit 12  $u$ . Es gibt genau 4  $g$ , die ebenfalls auf  $4!$  Arten angeordnet werden können.

Für den Fall, dass 6 Felder mit  $u$  belegt werden, sind in genau einer Zeile und genau einer Spalte 3 Felder mit  $u$  belegt. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

In genau einer Zeile sind 3 Felder mit  $u$ , in genau einer Spalte sind 3 Felder mit  $u$  belegt und es gibt keine weiteren Felder, die mit  $u$  belegt sind. Dann gibt es genau ein mit  $g$  belegtes Feld so, dass alle anderen Felder in der Zeile und in der Spalte dieses Feldes mit  $u$  belegt sind. Für dieses mit  $g$  belegte Feld gibt es 16 Möglichkeiten.

Im zweiten Fall sind in genau einer Zeile und genau einer Spalte 3 Felder mit  $u$  belegt und es gibt ein weiteres Feld, das mit  $u$  belegt ist. Dann gibt es  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$  Möglichkeiten, die Felder mit 6  $u$  und 10  $g$  zu belegen, in beiden Fällen zusammen 160 Möglichkeiten.

Sind genau 10 Felder mit  $u$  belegt, so argumentiert man ähnlich und erhält wieder 160 Möglichkeiten.

Sind 8 Felder mit  $u$  belegt, so gibt es genau zwei Zeilen und genau zwei Spalten, in denen 3 Felder mit  $u$  belegt sind. Diese beiden Zeilen resp. Spalten können nicht identisch belegt sein. Es gibt  $\binom{4}{2}$  Möglichkeiten die zwei Zeilen auszuwählen und  $4 \cdot 4$  Möglichkeiten diese beiden Zeilen nicht identisch zu belegen. Es gibt dann noch genau 2 Möglichkeiten die restlichen beiden  $u$  in die anderen Zeilen so zu verteilen, dass die Anforderungen erfüllt sind. Insgesamt gibt es 144 Möglichkeiten.

Da laut Aufgabenstellung 5 ungerade und 4 gerade Ziffern pro Feld zur Verfügung stehen, gibt es insgesamt

$$24 \cdot (5^{12} \cdot 4^4 + 5^4 \cdot 4^{12}) + 160 \cdot (5^{10} \cdot 4^6 + 5^6 \cdot 4^{10}) + 144 \cdot 5^8 \cdot 4^8 = 14\,459\,498\,240\,000$$

Möglichkeiten, die Felder wie verlangt zu besetzen.