
Rezensionen

T. Müller-Gronbach, E. Novak, K. Ritter: Monte Carlo-Algorithmen. 324 Seiten, SFr 31.90. Springer Berlin, 2012; ISBN 978-3-540-89140-6.

Es sei K eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n mit Volumen 1. Weiterhin seien X_0, \dots, X_n unabhängige und gleichverteilte Punkte in K . Wie groß ist das mittlere Volumen $V(K) := \mathbb{E}V([X_0, \dots, X_n])$ der (zufälligen) konvexen Hülle der $n + 1$ Punkte X_0, \dots, X_n ?

Diese Fragestellung bietet die Möglichkeit, eine typische Anwendung der klassischen Monte Carlo-Methode zur Approximation einer reellen Zahl a kennenzulernen. Das Mittel der Wahl dabei ist die sogenannte direkte Simulation. Dazu konstruiert man eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $(Y_i : i \geq 1)$ mit Erwartungswert a und approximiert a durch das arithmetische Mittel $\bar{Y}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i$ und mit wachsendem k wird diese Approximation tatsächlich immer genauer (unter gewissen Minimalvoraussetzungen zumindest). In unserem Eingangsbeispiel würde man Zufallspunkte $X_0^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}$ ($i \geq 1$) in K realisieren, $Y_i = V\left([X_0^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}]\right)$ setzen und den gesuchten Erwartungswert $V(K)$ durch den Mittelwert \bar{Y}_k approximieren.

Weshalb aber sollte dieser ‘Umweg’ interessant sein, kann man den exakten Wert für $V(K)$ nicht explizit angeben? Nun, für einfache Fälle ist das in der Tat möglich. In der Ebene gilt beispielsweise $V(\text{Dreieck}) = 1/12$. Andererseits blieb bereits die analoge Fragestellung mit $n = 3$ und $K = \text{Tetraeder}$ für Jahrzehnte ungelöst (Problem von Klee). Zunächst wurde der Wert $1/60$ vermutet, der jedoch nach recht aufwendigen Simulationen der obigen beschriebenen Bauart zu $1/57$ korrigiert wurde. Hier konnten also Monte Carlo-Methoden zur Überprüfung vorhandener und zur Aufstellung neuer Hypothesen im Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten gewinnbringend eingesetzt werden.

Das von Thomas Müller-Gronbach, Erich Novak und Klaus Ritter vorgelegte neue Buch über Monte Carlo-Algorithmen wagt einen Blick weit über diesen Horizont hinaus und führt den Leser anhand ausgewählter Fragestellungen bis zu den aktuellen Forschungsthemen dieses Bereichs. Dabei wird durchgängig und konsequent ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Apparat benutzt. Um dies umsetzen zu können, werden in den ersten beiden Kapiteln einige grundlegende Begriffe bereitgestellt. Daran schließen sich Diskussion über direkte Simulationsverfahren und Varianzreduktion an, wobei neben der eingangs skizzierten Anwendung unter anderem die Bereiche Spieltheorie und Finanzmathematik gestreift werden. In einem Abschnitt über Markov Ketten Monte Carlo-Algorithmen werden zunächst die Grenzen direkter Simulationen aufgezeigt und mittlerweile klassisch zu nennende Verfahren wie Metropolis-Algorithmen und Gibbs-Sampler vorgestellt. Der Einsatz dieser Werkzeuge wird am berühmten hard core-Modell bzw. am Ising-Modell der statistischen Physik demonstriert. Im letzten Kapitel des Buches widmen sich die Autoren deterministischen und randomisierten Algorithmen aus dem Themenkreis der numerischen Integration.

Der vorliegende Band ist das erste und einzige deutschsprachige (Lehr-) Buch zum Thema und ist mit seinem breiten Themenspektrum eine wirkliche Bereicherung. Es ist für Studenten nach den üblichen Standardvorlesungen zur Analysis, linearen Algebra und Wahrscheinlichkeitstheorie lesbar und ich kann mir gut vorstellen, das Buch als Grundlage für eine Vorlesung, ein Seminar oder einen Reading Course zu verwenden. Etwas schade ist, dass sich der Leser mit dem Betrachten der Abbildungen im Buch zufrieden geben muss und nicht selbst auf den Simulationsknopf drücken kann. Bei so viel angewandter Mathematik hätte ich mir über das Buch hinaus eine interaktive www-Seite mit einigen Applets gewünscht. Aber wer weiß, vielleicht entfaltet der Text seine

Wirkung auch dahingehend, dass sich einige engagierte Leser aufgefordert fühlen, die Theorie tatsächlich in die Praxis umzusetzen. Ansonsten kann ich das Buch uneingeschränkt und wärmstens empfehlen.

Übrigens, weder $1/60$ noch $1/57$ sind richtig gewesen. Tatsächlich lautet die Antwort $V(\text{Tetraeder}) = 13/720 - \pi^2/15015$, was wohl auch nach noch so vielen Monte Carlo-Simulationen niemand vermutet bzw. erraten hätte. Trotzdem: Viel Freude!

Chr. Thäle, Osnabrück

K. Wendland, A. Werner (Hrsg.): Facettenreiche Mathematik. Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung für alle, die mehr von Mathematik verstehen wollen. 469 Seiten, SFr 25. -. Vieweg und Teubner, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2011; ISBN 978-3-8348-1414-2.

Was sind elliptische Kurven, und wie kann man ihre Eigenschaften in der modernen Verschlüsselungstheorie verwenden? Wie dicht sind dichteste Kugelpackungen in n -dimensionalen Räumen, und was hat die Frage mit Codierungstheorie zu tun? Wie benützt man Graphen für die Erstellung von Spielplänen von Sportligen? Das sind einige der vielen Stationen einer Sightseeing Tour durch die moderne Mathematik, auf die 25 Mathematikerinnen, alle aus dem deutschsprachigen Raum stammend, den Leser mitnehmen. In 22 Beiträgen, die sich an mathematisch interessierte Leserinnen und Leser, Schüler und Schülerinnen der Oberstufe, Mathematiklehrerinnen und -lehrer, Studierende der Mathematik richten, geben sie einen Einblick in ihr Forschungsgebiet.

Die Reise führt an ganz unterschiedlichen Themen reiner und angewandter Mathematik heran. Es locken Überschriften wie „Mathematisches Potpourri rund ums Einsteigen ins Flugzeug“ (es geht um Warteschlangen und Young-Tableaus), „Mathematiker spinnen?! – Asymptotische Modellierung“ (gemeint sind Spinnprozesse von Glaswolle, für die mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik benutzt werden) oder „Wo Symmetrie ist, da ist eine Gruppe nicht weit“. Man kann jüngere und ganz junge Gebiete der Mathematik kennenlernen, wie im Beitrag über die Geometrie von Arrangements, in dem gezeigt wird, wie sich schwierige geometrische Abzählprobleme elegant lösen lassen, wie im Crashkurs zu Clusteralgebren oder wie in der Kurzpräsentation der tropischen Geometrie, in der sogenannte Schatten von algebraischen Kurven betrachtet werden (relativ einfache Gebilde, an denen sich gewisse Eigenschaften der betreffenden algebraischen Kurve noch ablesen lassen). Man trifft aber auch auf klassische Themen wie Approximation von Funktionen oder Symmetrien von Differentialgleichungen.

Das Buch, das in der Reihe *Populär* des Vieweg-Verlags erschienen ist, möchte auch mathematisch nicht geschulten Lesern zeigen, wie interessant, vielfältig und bedeutungsvoll Mathematik und die moderne mathematische Forschung sind, und dazu motivieren, sich intensiver mit Mathematik zu befassen. Dieses anspruchsvolle Vorhaben gelingt den Autorinnen, die ihre Texte mit didaktischem Gespür und grosser Sorgfalt verfasst haben, in erstaunlichem Mass. Im Vorwort, das ein sympathisches Plädoyer für die Mathematik enthält und geschickt in die nachfolgenden Texte einführt, wird der Leser aufgefordert, sich mit Papier und Bleistift und einer guten Portion Hartnäckigkeit mit den Problemstellungen auseinander zu setzen. Diese werden in den Beiträgen so eingeführt, dass sie nur gymnasiales Schulwissen voraussetzen. Wenn dann neue Begriffe definiert, Rechnungen und Beweise durchgeführt werden, wird es oft recht anspruchsvoll für Leser ohne Erfahrung mit mathematischen Texten. Begabten und wissbegierigen Schülern und Schülerinnen kann dies aber auch eine Herausforderung bieten. Manche Abschnitte verlangen mehr mathematische Vorkenntnisse, worauf der Leser jeweils hingewiesen wird. Auf dem knappen Raum von rund zwanzig Seiten kann ein Thema natürlich nicht allzu tief behandelt werden, aber die Autorinnen bemühen sich, die Grundideen sichtbar zu machen, geben Querverweise auf andere Beiträge des Bandes und kommentieren die sorgfältig ausgewählten Literaturangaben zum Weiterlesen. Auch der Schluss des Buches ist schön gestaltet mit Fotos und Angaben zum Werdegang aller Autorinnen.

Für Mathematiklehrerinnen und -lehrer bietet das Buch einerseits eine gute Möglichkeit zur Horizonterweiterung und andererseits eine Fülle von Anregungen für den Unterricht. Die Texte sind zwar nicht direkt im Unterricht einsetzbar, manche eignen sich aber ausgezeichnet für eine weitere didaktische Ausarbeitung oder als Anregung für eine Maturarbeit. Und schliesslich zeigt das Buch, dass auch Frauen herausragende mathematische Leistungen erbringen können, was nach wie vor eine wichtige Botschaft im Gymnasium ist.

K. Barro-Bergflödt, Zürich