Elem. Math. 70 (2015) 131 – 134
0013-6018/15/030131-4
DOI 10.4171/EM/286

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2016 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich (**neue Adresse**)

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1341: Für $|q| < 1$ zeige man die Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n(4n+1)} + q^{(2n+1)(4n+1)}.$$

Gleb Glebov, Burnaby, CAN

Aufgabe 1342: Im Tiefbau werden für Kanalisationsschächte konische, starkwandige Betonrohre verwendet. Es sind (hohle) schiefe Kreiskegelstümpfe, deren kürzeste Mantellinie senkrecht zu den beiden Kreisebenen steht. Das Zementwerk bringt am oberen Teil der längsten Mantellinie eine Öse so an, dass das am Kranseil aufgehängte Werkstück präzise mit horizontalem Leitkreis schwebend auf das vorbereitete, nasse (horizontale) Zementfundament aufgesetzt werden kann.

Man berechne für einen solch beschriebenen Hohl-Kreiskegelstumpf mit den Grundkreisradien R, $R+d$ und Schachtdeckelradien r, $r+d$ $(0 < d \ll r < R)$ sowie der Höhe H (Länge der kürzesten Mantellinie) den Ort für die Öse mit der beschriebenen Eigenschaft auf der längsten Mantellinie des Kegelstumpfes. Man formuliere auch die Bedingung für die Grössen R, r, d und H, sodass der Haken wirklich auf dem Kegelstumpf angebracht werden kann.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1343 (Die einfache dritte Aufgabe): Ein (dreidimensionaler) Würfel ist *geschmückt*, wenn auf jeder Seitenfläche eine Diagonale eingezeichnet ist. Wie viele verschiedene geschmückte Würfel gibt es?

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2014

Aufgabe 1329. Man bestimme die kleinste positive Zahl K so, dass die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)(a-bc)(b-ca)(c-ab)\le Kabc$$

für alle positiven Zahlen a, b, c mit $a+b+c=1$ gültig ist.

Orif Ibrogimov, Bern, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 7 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während das in Frage kommende $K=2$ schnell ersichtlich ist, ist es recht aufwändig, die entsprechende Ungleichung zu zeigen. Wir folgen der originellen Lösung von *Walther Janous*, der die Ungleichung geometrisch deutet und dann bekannte geometrische Ungleichungen im Dreieck benutzt.

Wir bemerken zuerst, dass die Ungleichung in der vorliegenden Form insofern „unfreundlich" ist, als sie zwar symmetrisch aber nicht homogen ist. Deshalb homogenisieren wir sie um den „Preis", dass wir die Nebenbedingung verlieren.

Damit erhalten wir (mit der Umbenennung der Variablen a, b, c in x, y, z)

$$\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}\right)\prod_{\text{zyk.}} x(x+y+z)-yz\le Kxyz(x+y+z).$$

Mit $x=y=z$ ergibt sich $6x^4\le 3Kx^4$. Folglich muss $K\ge 2$ sein. Wir werden zeigen, dass $K=2$ gilt.

Dazu transformieren wir die in Frage stehende algebraische Ungleichung mittels $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$ in eine geometrische Ungleichung, wobei a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks und s dessen halber Umfang ist. Dies führt zu

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\prod_{\text{zyk.}}(s-a)s-(s-b)(s-c)\le 2(s-a)(s-b)(s-c)s.$$

Mit Hilfe des Cosinussatzes ergibt sich

$$(s-a)s-(s-b)(s-c)=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}=bc\cos(\alpha),$$

und unter Berücksichtigung der Heronschen Formel erhält man

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)a^2b^2c^2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)\le 2F^2.$$

Nun verwenden wir bekannte Dreiecksungleichungen, nämlich zuerst

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)\le r^2/(2R^2),$$

wobei r und R Inkreis- bzw. Umkreisradius des Dreiecks sind (siehe Ungleichung (6.11), p. 182, in D.S. Mitrinović et al., *Recent Advances in Geometrical Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, 1989). Mit $abc = 4FR$ ist dann die verschärfte Ungleichung

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$$

zu zeigen. Dies ist aber Ungleichung (5.9), p. 173, aus dem oben angegebenen Werk.

Aufgabe 1330. Sei ABC ein Dreieck mit $b \neq c$ und D, E auf der Seite BC so, dass AD die Winkelhalbierende von α und $\frac{BE}{EC} = \frac{b}{c}$ ist. Weiter seien P und Q zwei verschiedene Punkte mit $PD = AD$, $QE = AE$ und $BP \neq AB \neq BQ$. Schliesslich seien $BP = p$, $CP = q$, $BQ = r$ und $CQ = s$. Man zeige dass

a) $c(r^2 + q^2) + b(s^2 + p^2) = (b + c)(b^2 + c^2)$ und

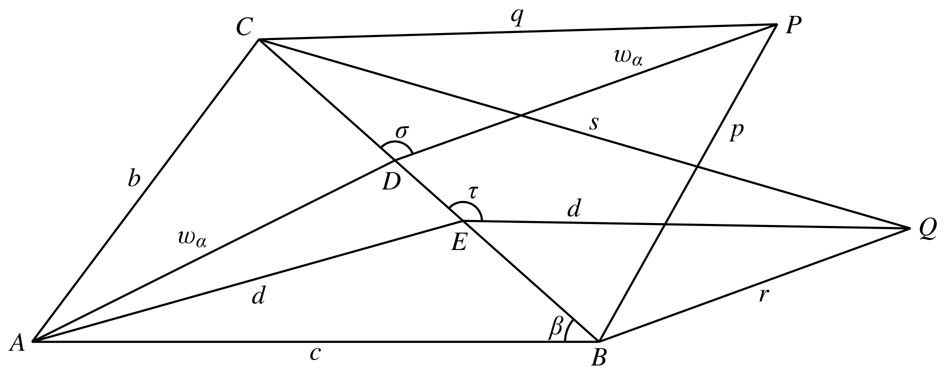
b) $QE > PD$.

Indika Shameera Amarasinghe, Nawal, CL

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 8 Leser haben Beiträge zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Peter Nüesch (Lausanne, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Die Lösungen unterscheiden sich einerseits in der gewählten Methode (Koordinatensystem, Vektoren) aber auch in der Ausführlichkeit. Arbeitet man mit dem Satz von Stewart, kann man die Lösung verkürzen. Wir folgen der Lösung von *Walter Burgherr*, der nur den Cosinussatz benötigt.

Seien $\sigma = \sphericalangle CDP$, $\tau = \sphericalangle CEQ$, $w_\alpha = AD = PD$ und $d = AE = QE$ (siehe Figur). Es gilt $CD = BE = \frac{ab}{b+c}$ und $BD = CE = \frac{ac}{b+c}$.



Wendet man zuerst den Cosinussatz auf die Dreiecke ABD, ABE und ABC mit Winkel β an, so erhält man nach Elimination von $\cos(\beta)$ und Einsetzen von BD resp. BE

$${w_\alpha}^2 = \frac{bc(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}{(b + c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

und
$$d^2 = \frac{bc(b^2+c^2-a^2)+b^4+c^4}{(b+c)^2} = b^2 - bc + c^2 - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Dies entspricht im Wesentlichen dem Satz von Stewart. Nun wendet man den Cosinussatz auf die Dreiecke CDP, BDP, CEQ, BEQ an und erhält nacheinander

$$\begin{aligned}
p^2 &= w_\alpha{}^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + 2w_\alpha \frac{ac}{b+c}\cos(\sigma),\\
q^2 &= w_\alpha{}^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - 2w_\alpha \frac{ab}{b+c}\cos(\sigma),\\
r^2 &= d^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + 2d \frac{ab}{b+c}\cos(\tau),\\
s^2 &= d^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2d \frac{ac}{b+c}\cos(\tau).
\end{aligned}$$

Im gefragten Ausdruck kompensieren sich die Terme mit den Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}
b(p^2+s^2)+c(q^2+r^2) &= (b+c)(w_\alpha{}^2+d^2) + 2\frac{a^2b^2c+a^2bc^2}{(b+c)^2}\\
&= (b+c)(b^2+c^2) - \frac{2a^2bc}{b+c} + \frac{2a^2bc}{b+c} = (b+c)(b^2+c^2),
\end{aligned}$$

was Teil a) beweist.

Für Teil b) berechnet man wegen $QE = d$ und $PD = w_\alpha$

$$d^2 - w_\alpha{}^2 = b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2 > 0.$$

Aufgabe 1331 (Die einfache dritte Aufgabe). Seien F und G komplexe Matrizen mit $F = FGF$. Zeige, dass dann $\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(GFG)$ gilt, wobei rg(.) den Rang einer Matrix bezeichnet.

Oskar Maria Baksalary, Poznań, PL und Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 3 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH) und Frieder Grupp (Schweinfurt, D).

Am einfachsten geht es, wenn man die mittels der Matrizen F und G definierten Abbildungen betrachtet. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*.

Sei $f\colon x \mapsto Fx$ eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ mit $f(\mathbb{C}^n) = U$ und $\dim(U) = \mathrm{rg}(F)$. Sei analog $g\colon y \mapsto Gy$ eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ mit $g(U) = W \subseteq g(\mathbb{C}^m) = V$.

Aus $f = f \circ g \circ f$ folgt $(f \circ g)\big|_U = \mathrm{Id}_U$. Daher sind $g\big|_U$ und $f\big|_W$ inverse Bijektionen $U \to W$ und insbesondere ist wegen $f(W) = U$ auch $f(V) = U$. Damit ist auch $g \circ f \circ g\,(\mathbb{C}^m) = g \circ f\,(V) = g(U) = W$ und es folgt $\mathrm{rg}(GFG) = \dim(W) = \dim(U) = \mathrm{rg}(F)$.