Elem. Math. 70 (2015) 135 – 136
0013-6018/15/030135-2
DOI 10.4171/EM/287

Elemente der Mathematik

Rezensionen

R.E. Greene and S.G. Krantz: Function Theory of One Complex Variable. xix+504 pages, US$ 81. Graduate Studies in Mathematics, vol 40, 3rd edition, 2006, American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-3962-1.

As is well known, there is an abundant number of textbooks on the theory of functions of one complex variable. A question that could be asked is why Greene and Krantz's book deserved a third edition? One good reason could be because the textbook covers more than standard matter on the subject and because it is well presented in a pedagogical way.

It starts from scratch with the very first definition of complex numbers as pairs of real ones, with detailed comments, examples and proofs of elementary facts on complex numbers. An interesting fact is that emphasis is put on the relationship between (real valued) harmonic functions and holomorphic ones on "elementary domains" (disks and rectangles). It is to be noted that the continuity of the derivative is assumed in the definition of a holomorphic function. The proof of Goursat's Theorem is postponed in Appendix B at the very end of the treatise.

The first four chapters contain standard matter on Cauchy theory, followed by the theorem on zeros of holomorphic functions and its consequences like the Maximum Modulus Principle. Chapter 5 is a short chapter devoted to zeroes of holomorphic functions. It contains standard topics such as the Argument Principle, the Maximum Principle, the Open Mapping Theorem and the Schwarz Lemma, among others.

Chapter 6 is divided into two parts. The first one is devoted to the classification of biholomorphic mappings of the complex plane first, then to the classification of biholomorphic mappings of the unit disk and finally to that of biholomorphic mappings of $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. The second part of the chapter is a first step to the analytic form of the Riemann Mapping Theorem, where the authors introduce the notion of *holomorphically simply connected domains*: by definition, these are connected, open sets in which every holomorphic function admits an antiderivative. The authors prove there that if such a domain is distinct from $\mathbb{C}$, then it is conformally equivalent to the unit disk; the equivalence with simple connectivity in the usual topological sense being established in Chapter 11. The reason why the authors proceed in two steps is explained in the preface to the first edition: "[...] we have made a systematic attempt to separate analytical ideas, belonging to complex analysis in the strictest sense, from topological considerations." Chapter 11 also contains Cauchy's Formula for multiply connected domains, completing the proof of the Riemann Mapping Theorem for the general case of simply connected domains.

The monograph contains a rather classical and quite complete study of harmonic functions on open sets of the complex plane (Schwarz reflexion and Harnack's principles), including Perron's method, a presentation of infinite series and products, together with Weierstrass and Mittag-Leffler theorems, rational approximation theory, and special classes of holomorphic functions and hence Hilbert spaces of holomorphic functions, among others.

The short Chapter 15 is a study of the special functions Γ and B which is used in the last chapter, the latter being devoted to a nice and self-contained proof of the Prime Number Theorem. The use of complex analysis here is very clearly explained and motivated.

The last section of each chapter contains many interesting exercises of different levels, some being "routine drill" and others requiring much deeper thinking.

Here is one last comment; it is about two somewhat surprising notations that I do not like since I find them inappropriate. The first one concerns the notation of real numbers considered as elements of $\mathbb{C}$: instead of writing simply x, say, they write it $x+i0$. I can understand that such a pedantic notation could be used in the first chapter, where x is identified with the pair $(x, 0)$ just after the definition of $\mathbb{C}$, but not in the sequel. The second thing that I do not like is the use (without any apparent logic) of capital letters (typically P) for complex numbers in formulas such as the Cauchy Integral Formula or in power series expansions, for instance

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(P)}{n!}(z - P)^n.$$

The problem is that, nowadays, capital letters usually denote sets, and that is why I do not understand the authors' choice for such a notation.

Nevertheless, the textbook is well written, it contains interesting material, proving that it can be recommended to prepare complex analysis courses.

Paul Jolissaint, Porrentruy

K. Schüffler: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. Mathematische Temperierungstheorie in der Musik. 242 Seiten, SFr 35.30. Vieweg Verlag, 2011; ISBN 978-3-834-81920-8.

Nehmen wir Platz in der Marienkirche in Lübeck, es ist Ostern um das Jahr 1700, eine eigens für diesen Anlass komponierte Kantate wird zur Aufführung gebracht. Im Text ist die Rede vom Tod und von Schmerzen und wir schauen in etliche verzerrte Gesichter, die all das nachvollziehen, was sie hören.

Wiederholen wir heute die Aufführung derselben Kantate, so bleiben solche Reaktionen meistens aus. Der Grund dafür ist, dass diese Musik damals anders geklungen hat als heute, was unter anderem daran liegt, dass moderne Instrumente sowohl anders gebaut als auch anders gestimmt werden. Die Komponisten der Barockzeit spielten geschickt damit, dass zu ihrer Zeit bestimmte Tonarten 'gut', andere dafür 'schief' oder 'schräg' klangen. So konnten sehr eindrucksvolle Klangbilder erzeugt werden, denen auch die oben beschriebenen Reaktionen zuzuschreiben sind.

Der von Karlheinz Schüffler vorgelegte Band *Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma* beschäftigt sich – grob gesprochen – mit der Frage, wie man 12 Töne in einer Oktave unterbringt, oder etwas präziser ausgedrückt, mit Temperierungstheorie in der Musik (Temperierung bedeutet soviel wie Stimmungssystem). Das Buch beleuchtet die vielfältgen Antworten, die auf diese Frage gegeben wurden, angefangen von der pythagoräischen Temparatur, über die Werckmeister- oder die Silbermannstimmung bis hin zu gleichstufigen Temperierungen der Neuzeit. Dazu wird eine durchgehend mathematische Sprache verwendet, insbesondere das logarithmische Centmaß zur Messung von Intervallen mitsamt der Eulerschen Cent-Funktion sowie eine abstrakte Intervall-Arithmetik. Auch wird ein, wenn auch teilweise aufgelockerter, Definition-Satz-Beweis-Stil durchgehalten.

Das ambitionierte Vorgehen des Autors verlangt etliche Vorbereitung und Vorbildung des Lesers. In den ersten beiden Kapiteln wird das nötige mathematische Rüstzeug bereitgestellt, beispielsweise die bereits erwähnte abstrakte Intervall-Arithmetik und eine algebraische Strukturtheorie der Diatonik und Chromatik. Anschließend werden systematisch das pythagoräische und das natürlich-hamonische Tonsystem, die Theorie der Mitteltönigkeit, historische und neuzeitliche Temperierungen und eine analytische Theorie der Iterationsskalen vorgestellt.

Der mathematisch vorgebildete Leser sollte für die Lektüre eine gute Portion Musikverständnis und -praxis mitbringen, idealerweise auch eine Portion Musiktheorie. Dem geneigten Musiker, der auf Kriegsfuß mit Mathematik und abstraktem Denken steht, sei vom Griff zu diesem Band eher abzuraten. Wer sich davon nicht abschrecken lässt und sich mit dem Autor auf den mitunter steinigen Weg macht, wird reichlich belohnt mit tiefen Einsichten und der Erkenntniss, dass Mathematik und Musik eben nicht wie Feuer und Wasser sind. Wem das zu harte Kost ist, dem sei lieber eine gute Einspielung der Eingangs erwähnten Musik zu empfehlen.

E.-M. Gassner, Osnabrück & Chr. Thäle, Bochum

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*