

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2016 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1344:** Es sei  $n$  eine positive ganze Zahl und

$$a_n = \frac{(n! \omega_n)^{1/n}}{2},$$

wobei  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel bedeuten soll. Man zeige, dass  $a_n < \sqrt{n}$  für alle  $n \geq 2$ .

René Ellenberger, Gümligen, CH

**Aufgabe 1345:** Man bestimme alle 5-Eckzahlen, die auch 6-Eckzahlen sind.

Janny C. Binz, Bolligen, CH

**Aufgabe 1346 (Die einfache dritte Aufgabe):** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit  $b \neq c$  und schneide die Winkelhalbierende von  $\alpha$  die Seite  $BC$  im Punkt  $D$ .

- a) Man zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt  $P$  im Innern auf  $AD$  so gibt, dass die Ecktransversalen  $BE$  und  $CF$  durch  $P$  gehen und  $DE = DF$  gilt.
- b) Man schliesse, dass in diesem Fall das Dreieck  $DEF$  nur dann gleichseitig ist, wenn  $\alpha = 120^\circ$  ist.

Mowaffaq Hajja, Irbid, JOR

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2014

**Aufgabe 1332.** Man berechne

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1 + \tan(x))}{(\tan(2x) + \cot(2x))^n} dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Marcel Chirita, Bukarest, RO

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Beiträge von folgenden 11 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Johannes Vigfusson (Brugg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es ist klar, dass das in Frage stehende Integral auf die Berechnung bekannter Integrale zurückgeführt werden muss. Die meisten Löser gehen ähnlich vor wie *Michael Vowe*, dessen Ausführungen wir folgen.

Durch einfache trigonometrische Formeln lässt sich das vorgelegte Integral umformen in

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) (\sin(2x) \cos(2x))^n dx = \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) \sin^n(4x) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}) \sin^n(4x) dx + \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{1 + \tan(x)}{\sqrt{2}}\right) \sin^n(4x) dx. \end{aligned}$$

Im zweiten Integral  $I_2(n)$  dieser Summe substituieren wir  $x = \frac{\pi}{4} - y$  und erhalten wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \tan(y)} = \left(\frac{1 + \tan(y)}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$$

und  $\sin(\pi - 4y) = \sin(4y)$ , dass  $I_2(n) = -I_2(n)$  und somit  $I_2(n) = 0$  ist.

Somit wird

$$I(n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(2) \int_0^{\pi/4} \sin^n(4x) dx.$$

Mit der Substitution  $u = 4x$  erhält man die bekannten Integrale  $J(n) = \int_0^{\pi} \sin^n(u) du$  mit

$$J(2m) = \frac{\pi}{2^{2m}} \binom{2m}{m}, \quad J(2m+1) = \frac{2^{2m+1}}{(2m+1) \binom{2m}{m}}$$

und damit

$$I(2m) = \frac{\ln(2)}{2^{2m+3}} \cdot J(2m) = \frac{\ln(2)}{4^{2m+1}} \binom{2m}{m} \frac{\pi}{2}$$

resp.

$$I(2m+1) = \frac{\ln(2)}{2^{2m+4}} \cdot J(2m+1) = \frac{\ln(2)}{8(2m+1) \binom{2m}{m}}.$$

**Aufgabe 1333.** Man zeige, dass alle Nullstellen der Polynome

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z+k) - \prod_{k=1}^n (z-k)$$

für  $n = 2, 3, 4, \dots$  rein imaginär sind, also die Form  $z = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$  und  $i^2 = -1$  haben.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 16 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Johannes Vigfusson (Brugg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Die meisten Löser haben die Lösungsidee, dass bei nicht rein imaginären Nullstellen die Abstände der Nullstelle zu den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  einerseits und die Abstände zu den Zahlen  $-1, -2, \dots, -n$  andererseits je immer kleiner, oder je immer grösser wären, was aber nicht geht. Am prägnantesten bringt es *Ulrich Abel*, dessen Lösung wir abdrucken, auf den Punkt.

Ist  $z = x + iy$  eine Nullstelle des Polynoms

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z+k) - \prod_{k=1}^n (z-k),$$

so gilt

$$\prod_{k=1}^n |z+k| = \prod_{k=1}^n |z-k|.$$

Wegen  $|z+k|^2 - |z-k|^2 = 4xk$  folgt aus  $x > 0$  die Ungleichung  $\prod_{k=1}^n |z+k| > \prod_{k=1}^n |z-k|$ ;

entsprechend folgt aus  $x < 0$ , dass  $\prod_{k=1}^n |z+k| < \prod_{k=1}^n |z-k|$ . Notwendigerweise muss also

$\operatorname{Re}(z) = x = 0$  gelten.

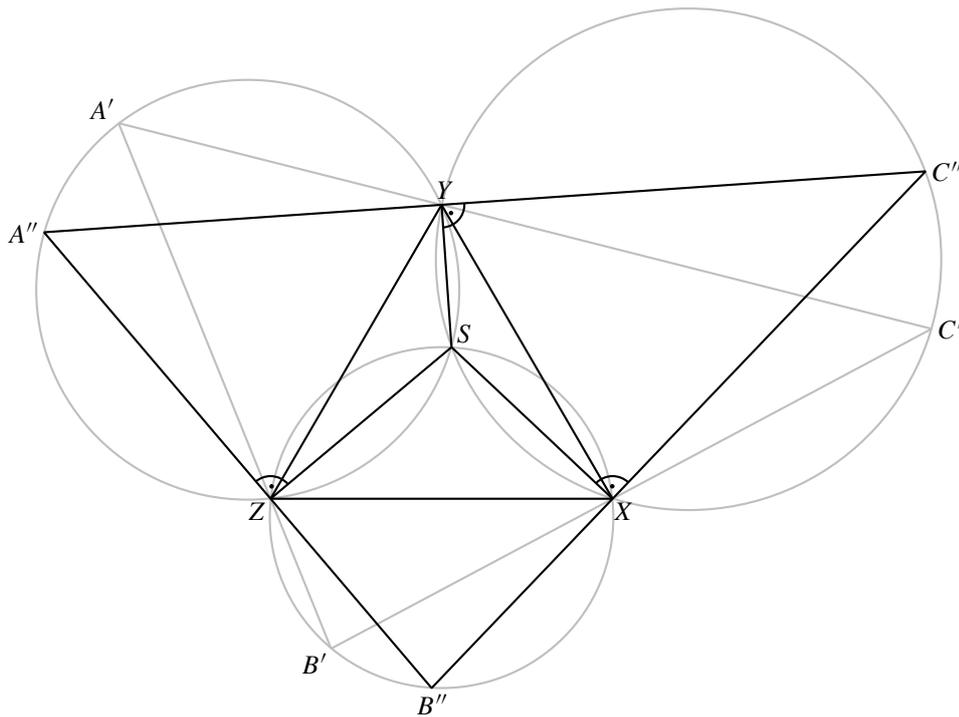
**Aufgabe 1334 (Die einfache dritte Aufgabe).** Man konstruiere zu einem gegebenen Dreieck  $ABC$  ein möglichst kleines, gleichseitiges Dreieck so, dass auf jeder Seite von  $ABC$  eine Ecke des gleichseitigen Dreiecks liegt.

Christoph Soland, Belmont sur Lausanne, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Zuschriften von folgenden 12 Lesern eingegangen: George Bercea (München, D), Christian Blatter (Greifensee, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Am einfachsten kommt man auf die Lösung, wenn man das inverse Problem löst, d.h. einem gegebenen gleichseitigen Dreieck umschreibt man das grösstmögliche Dreieck, das zum Dreieck  $ABC$  ähnlich ist. Wir folgen *Fritz Siegerist*, der ohne Rechnung auskommt.

Zuerst konstruiert man die Fasskreise zu den Winkeln von  $ABC$  über den Seiten des gleichseitigen Dreiecks  $XYZ$ . Die Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt  $S$ . Dreiecke  $A'B'C'$  (siehe Figur) sind dann ähnlich zum gegebenen Dreieck  $ABC$ . Und da die Teildreiecke wie  $A'SB'$  ihre Winkel aufgrund des Peripheriewinkelsatzes ebenfalls fixiert haben, findet man das grösste Dreieck  $A''B''C''$  mit den grössten Höhen von  $S$  aus, d.h. den Senkrechten der gemeinsamen Sehnen der Ortskreise.



**Problem 672 A aus Heft 3, 1972.** Bekanntlich ist  $1/2 + \dots + 1/n$  für keine natürliche Zahl  $n > 2$  ganzzahlig. Ich vermute, dass für  $n > 5$  und jede ganze Zahl  $N$  gilt:  $|1/2 + \dots + 1/n - N| > 1/[2, \dots, n]$ . P. Erdős, Budapest

Zu diesem Problem erreichte uns eine Teillösung von *Tatiana Hessami Pilehrood, Ontario, CDN*, die wir hier abdrucken.

Sei  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  die  $n$ -te harmonische Zahl und  $D_n = [2, \dots, n]$  das kleinste gemeinsame Vielfache der ersten  $n$  positiven ganzen Zahlen.

Wir zeigen, dass die nicht strenge Ungleichung aus der Fragestellung elementar bewiesen werden kann. Sei dazu  $m$  eine positive ganze Zahl so, dass  $2^m \leq n < 2^{m+1}$  ist. Dann ist unter den Nennern der Brüche  $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$  nur einer, nämlich  $2^m$ , durch die Zweierpotenz  $2^m$  teilbar. Daraus folgt, dass

$$H_n = \frac{p}{q \cdot 2^m}$$

mit ungeraden Zahlen  $p$  und  $q$  geschrieben werden kann und deshalb  $H_n \notin \mathbb{Z}$  gilt.

Andererseits ist für jedes  $n > 1$  und jede ganze Zahl  $N$  die Zahl  $D_n(H_n - N)$  eine von Null verschiedene ganze Zahl. Deshalb ist

$$D_n |H_n - N| \geq 1$$

und

$$|H_n - N| \geq \frac{1}{D_n}.$$

Man beachte, dass für  $(n, N) \in \{(2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$  die Gleichheit gilt.