
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2016 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1347: Man berechne

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} J(n),$$

dabei ist $J(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}$.

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Aufgabe 1348: Im Dreieck ABC seien R, r der Um- bzw. der Inkreisradius. Die Eulersche Ungleichung $R \geq 2r$ impliziert $\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Man beweise die folgende Interpolationsungleichung

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

die die Ungleichung aus Aufgabe 1232 (Elem. Math. 61, 2006) verschärft.

Martin Lukarevski, Skopje, MK

Aufgabe 1349 (Die einfache dritte Aufgabe): G bezeichne die Menge aller minimalen Gitterwege w , die im ebenen Koordinatengitter im Punkt $(0, 0)$ starten, zu einem Punkt $P(i, m)$ auf der Geraden $y = m$ aufsteigen und von P aus zum Punkt $(n, 0)$ absteigen. (Die Variable i variiert dabei von 0 bis n und die beiden Äste dürfen auf der Geraden $x = i$

gemeinsame Segmente haben.) Jeder solcher Weg w berandet zusammen mit der x -Achse ein polygonales Gebiet mit Flächeninhalt $A(w)$. Man berechne $A(n, m) = \sum A(w)$, wobei sich die Summe über alle Wege aus G erstreckt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2015

Aufgabe 1335. Man zeige die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8k+3} - \frac{1}{8k-3} + \frac{1}{8k+1} - \frac{1}{8k-1} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{4}{3}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16k+7} - \frac{1}{16k-7} + \frac{1}{16k+1} - \frac{1}{16k-1} \right) = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pi}{8} - \frac{8}{7}.$$

Gleb Glebov, Burnaby, CAN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 20 Leser haben Lösungen eingesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Daniel Fritze (Berlin, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Johannes Vigfusson (Brugg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Unter den eingegangenen Lösungen kann man etwa drei verschiedene Ansätze unterscheiden. Der direkteste Weg ist, die Summen als Potenzreihen an der Stelle $x = 1$ zu interpretieren. Eine zweite Möglichkeit besteht, andere Reihen, in der Regel Partialbruchzerlegungen trigonometrischer Reihen, beizuziehen oder drittens die Reihen als Fourier-Zerlegungen geeigneter Funktionen an einem geeigneten Funktionswert zu interpretieren. Wir folgen der Lösung von *Daniel Fritze*, der mit dem zweiten Ansatz operiert.

Zunächst verschafft man sich mit der Halbwinkelformel den Wert

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/4)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}.$$

Wir setzen nun in die bekannte Partialbruchzerlegung der Sinusfunktion

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k+x} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

die Werte $x = 1/4$ bzw. $x = 1/8$ ein und erhalten nach Division mit 4 bzw. 8

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+1} \right),$$

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pi}{8} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{8k-1} - \frac{1}{8k+1} \right).$$

Weil die Summanden rechts eine Nullfolge bilden, kann man die Klammern neu setzen ohne die Reihenfolge der Summanden wesentlich zu verändern und erhält

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8k-3} - \frac{1}{8k-1} + \frac{1}{8k+1} + \frac{1}{8k+3} \right),$$

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pi}{8} = 1 + \frac{1}{7} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{16k-7} - \frac{1}{16k-1} + \frac{1}{16k+1} + \frac{1}{16k+7} \right),$$

worauf die Behauptungen folgen.

Aufgabe 1336. Ein zylindrisches Blechfass sei nicht leer und wird mit einer Flüssigkeit so gefüllt, dass es nicht ganz voll ist. Welche Forderungen muss man an das Verhältnis $H : R$ seiner Höhe H und seines Radius R stellen, damit es mit derselben Flüssigkeitsmenge möglich wird, bei liegendem oder stehendem Fass einen gleichen Flüssigkeitsstand h ($0 < h < 2R$ bzw. $0 < h < H$) messen zu können?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

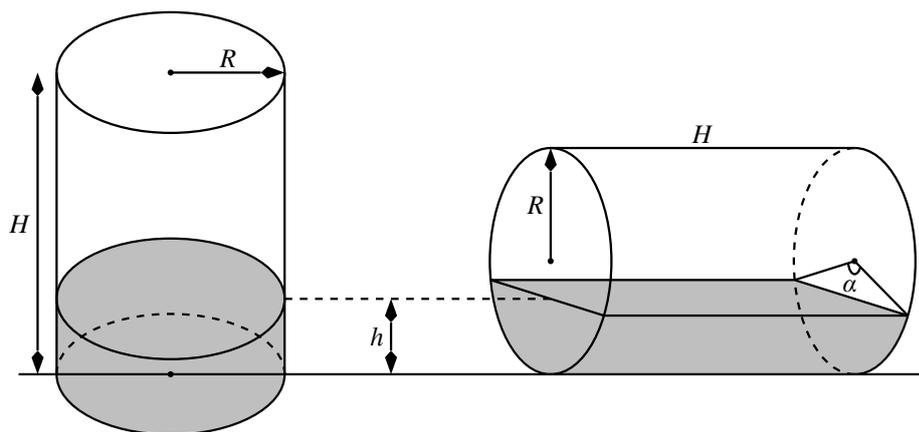
Eine Bedingung für das Verhältnis $H : R$ herzuleiten ist nicht sehr schwierig. Die Lösungen unterscheiden sich daher nur in der Diskussion dieser Bedingung. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*, der das sehr sorgfältig macht.

Für die Flüssigkeitsmenge im stehenden Fass gilt $F_s = \pi R^2 h$, für die Flüssigkeitsmenge im liegenden Fass $F_l = HR^2(\alpha - \sin(\alpha))/2$, wobei α der Zentriwinkel des benetzten Kreisabschnittes ist. Nun gilt

$$F_s = F_l \Leftrightarrow \frac{H}{R} = \frac{2\pi h}{R(\alpha - \sin(\alpha))} = 2\pi \cdot \frac{1 - \cos(\frac{\alpha}{2})}{\alpha - \sin(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$

Für die Funktion

$$f(\alpha) = \frac{1 - \cos(\frac{\alpha}{2})}{\alpha - \sin(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\pi,$$



gilt $f'(\alpha) = -\frac{Z(\alpha)}{(a - \sin(\alpha))^2}$ mit

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &= (1 - \cos(\alpha)) \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\alpha - \sin(\alpha)) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin(\alpha) - \alpha\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) g(\alpha). \end{aligned}$$

Nun ist

$$g'(\alpha) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\alpha) - 1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))$$

und es gilt $g(0) = 0$ und $g(2\pi) = -2\pi < 0$ und weiter $g'(\alpha) > 0$ für $0 < \alpha < \pi$, sowie $g'(\alpha) < 0$ für $\pi < \alpha < 2\pi$. Deshalb besitzt $g(\alpha)$ genau eine positive Nullstelle $\alpha_0 = 4.278\dots$ im Intervall $0 < \alpha < 2\pi$. Die Funktion $f(\alpha)$ ist daher streng monoton fallend für $0 < \alpha < \alpha_0$ und streng monoton wachsend für $\alpha_0 < \alpha < 2\pi$. Wegen $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(\alpha) = \infty$ und $f(2\pi) = \frac{1}{\pi}$ gilt $f(\alpha) \geq f(\alpha_0)$ für $0 < \alpha < 2\pi$.

Es muss also $\frac{H}{R} \geq 2\pi \cdot f(\alpha_0) = 1.863\dots$ gelten, um eine Lösung für die gestellte Aufgabe zu erhalten. Da $2\pi \cdot f(\pi) = 2\pi \cdot f(2\pi) = 2$, hat die gestellte Aufgabe genau eine Lösung für $0 < \alpha \leq \pi$ und genau zwei Lösungen für $\pi < \alpha < 2\pi$. Im ersteren Fall ist $\frac{H}{R} \geq 2$, im letzteren Fall ist $\frac{H}{R} < 2$.

Aufgabe 1337 (Die einfache dritte Aufgabe). Eine Zahlenfolge sei durch die Anfangsglieder a_0 und a_1 und für $n \geq 2$ durch die Rekursion $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ definiert. Welcher Rekursion genügen die Zahlenfolgen $d_n = a_n^2$ und $e_n = a_n a_{n-1}$?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Jürgen Spilker (Frei-

burg, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da beide neuen Folgen die gleiche Rekursion erfüllen, erkennt *Jürgen Spilker*, dessen Ausführungen wir folgen, eine Verallgemeinerung der Aufgabenstellung.

Sind die Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von

$$f(n+2) = pf(n+1) + qf(n), \quad n \geq 0,$$

dann ist die Funktion $g = f_1 f_2$ eine Lösung von

$$g(n+3) = (p^2 + q)g(n+2) + (p^2q + q^2)g(n+1) - q^3g(n), \quad n \geq 0.$$

Beispiele sind etwa $f_2(n) = f_1(n+i)$, $i \in \mathbb{N}_0$. Die originalen Aufgaben sind dann die Fälle $i = 0$ und $i = 1$.

Für alle $n \geq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} g(n+3) &= (pf_1(n+2) + qf_1(n+1))(pf_2(n+2) + qf_2(n+1)) \\ q^2g(n) &= (f_1(n+2) - pf_1(n+1))(f_2(n+2) - pf_2(n+1)) \end{aligned}$$

und daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(n+3) + q^3g(n) &= (p^2 + q)f_1(n+2)f_2(n+2) + (p^2q + q^2)f_1(n+1)f_2(n+1) \\ &= (p^2 + q)g(n+2) + (p^2q + q^2)g(n+1), \end{aligned}$$

worauf die Behauptung folgt.