Elem. Math. 71 (2016) 84 – 87
0013-6018/16/020084-4
DOI 10.4171/EM/302

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2016 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1350: Für $p > 3$ sei

$$f(x) = x^{p-2}(2 - x^p).$$

Man zeige, dass $0 \leq f(x) \leq 1$ gilt, wann immer $0 \leq x \leq \cos(\frac{\pi}{p-1})$ ist.

Raymond Mortini, Metz, F

Aufgabe 1351: Für die natürlichen Zahlen n und k sei

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{kn - in}{k + m}.$$

Man werte die Summe $S(n, k)$ geschlossen aus.

Michael Vowe, Therwil, CH

Aufgabe 1352 (Die einfache dritte Aufgabe): Warum endet für jede Primzahl $p > 5$ die Potenz p^{500} mit der Ziffernfolge 0001? Wie kann man diese Aussage verallgemeinern?

Burchard Kaup, Villars-sur-Glâne, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2015

Aufgabe 1338. Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\begin{aligned}&8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\\&\quad\geq (a(b+c)+2bc)^2(b(c+a)+2ca)^2(c(a+b)+2ab)^2.\end{aligned}$$

Mihály Bencze, Bukarest, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 20 Lesern sind Lösungen eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Dragoljub Milošević (Gornji Milanovac, SRB), Wolfgang Remmel (Wien, A), Mok-Kong Shen (München, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser bemerken, dass sich die gesuchte Ungleichung als Produkt von drei einfacheren Ungleichungen schreiben lässt. Wir folgen der Lösung von *Moritz Adelmeyer*.

Es genügt die Ungleichung

$$2(a+b)^2(c^2+ab)\geq \big(c(a+b)+2ab\big)^2 \tag{1}$$

zu zeigen. Durch zyklisches Vertauschen ergeben sich zwei weitere Ungleichungen, die zusammen mit (1) multipliziert die gesuchte Ungleichung ergeben.

Ungleichung (1) ist äquivalent zu

$$\left(c+\frac{2ab}{a+b}\right)^2\leq 2(c^2+ab).$$

Diese letztere Ungleichung kann mit den bekannten Ungleichungen zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel – angewendet auf a und b – und dem geometrischen und arithmetischen Mittel – angewendet auf c^2 und ab – nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned}\left(c+\frac{2ab}{a+b}\right)^2&\leq (c+\sqrt{ab})^2=c^2+2c\sqrt{ab}+ab=c^2+2\sqrt{c^2\cdot ab}+ab\\&\leq c^2+2\,\frac{c^2+ab}{2}+ab=2(c^2+ab).\end{aligned}$$

Aufgabe 1339. Beweise die Produktdarstellung

$$(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=e\cdot\sqrt[2]{e^{1/3}}\cdot\sqrt[4]{e^{1/5}}\cdot\sqrt[8]{e^{1/7}}\cdot\sqrt[16]{e^{1/9}}\cdot\ldots$$

Horst Alzer, Waldbröl, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 21 Lösungen eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Daniel Fritze (Berlin, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Metz, F), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es ist allen Lösern klar, dass man durch Logarithmieren das Produkt in eine Reihe umwandelt und dann mit bekannten Reihendarstellungen operiert. Wir folgen *Walter Burgherr*, der die Reihenentwicklung auch herleitet.

Logarithmiert man die Gleichung, so bleibt

$$\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{8\cdot 7} + \frac{1}{16\cdot 9} + \cdots$$

zu beweisen. Inspiriert von der rechten Seite der Gleichung führt man die Potenzreihe

$$F(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{8}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{16}\frac{x^9}{9} + \cdots$$

ein. Die Ableitung

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^8 + \cdots$$

ist eine geometrische Reihe und lässt sich für $|x| < \sqrt{2}$ summieren: $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2/2} = \frac{2}{2-x^2}$. Durch Integration gewinnt man daraus wieder F

$$F(x) = \int \frac{2}{2-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-x} + \frac{1}{\sqrt{2}+x}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right) + C$$

und

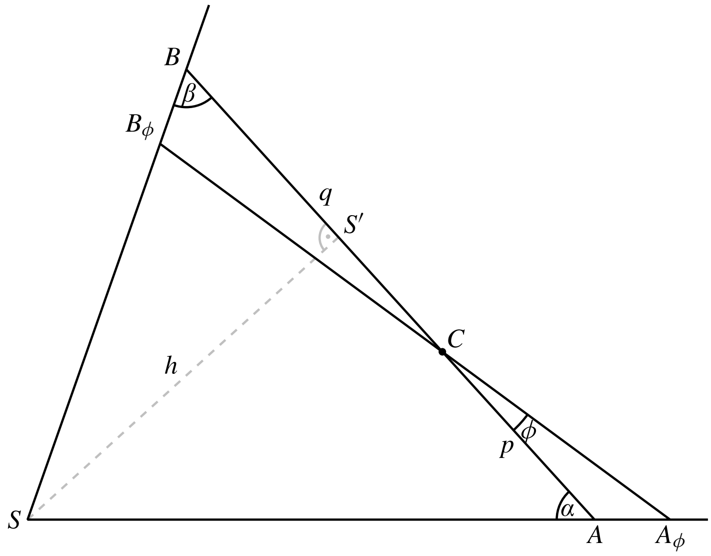
$$F(1) = F(0) + \int_0^1 \frac{2}{2-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left((\sqrt{2}+1)^2\right),$$

womit der Beweis erbracht ist.

Aufgabe 1340 (Die einfache dritte Aufgabe). Auf den Schenkeln eines Winkels ist je ein Punkt A beziehungsweise B ausgewählt. Jeder innere Punkt C der Transversale AB ist Büschelpunkt eines Transversalbüschels. Bestimme C so, dass AB in diesem Büschel die kleinste Länge hat.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 12 Lesern eingegangen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter



Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Leser lösen ein Extremalproblem. *Christian Blatter* und auch andere Löser zeigen zusätzlich, wie man den Büschelpunkt C konstruiert.

Es bezeichne S die Spitze des betrachteten Winkels, α den Winkel bei A und β den Winkel bei B im Dreieck ASB. Ferner seien $p = |AC|$ und $q = |BC|$. Wird die Gerade AB mit Drehzentrum C um den kleinen Winkel ϕ gedreht, so erhält man eine neue Transversale $A_\phi B_\phi$ der Länge $l(\phi)$. Mit Hilfe des Sinussatzes, angewandt auf die Dreiecke ACA_ϕ und BCB_ϕ, berechnet man leicht

$$l(\phi) = p\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha-\phi)} + q\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta+\phi)}$$

und

$$\left.\frac{dl}{d\phi}\right|_{\phi=0} = p\cot(\alpha) - q\cot(\beta) = \cot(\alpha)\cot(\beta)\bigl(p\tan(\beta) - q\tan(\alpha)\bigr).$$

Hieraus lässt sich der folgende Schluss ziehen: Ist einer der beiden Winkel α, β stumpf, so gibt es kein Büschelzentrum C innerhalb der Strecke AB, für das AB die kürzeste Transversale ist. Sind aber die beiden genannten Winkel spitz, so ist AB die kürzeste Transversale zum Büschelzentrum C, falls $p\tan(\beta) = q\tan(\alpha)$ gleich der Höhe h des Dreiecks ASB ist. Man erhält diesen Punkt C, indem man von S das Lot auf AB fällt und den erhaltenen Punkt S' am Mittelpunkt der Strecke AB spiegelt.

Bemerkung: Ein Leser bemerkt, dass diese Aufgabe im Buch *Maksimumy i minimumy v geometrii, Moskau 2005* (russisch) von *Vladimir Yuryevich Protasov* vorkommt.