
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2017 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1353: Man bestimme den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n/2}}{n(n+1)},$$

wobei $H_s = \int_0^1 \frac{1-x^s}{1-x} dx$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $s > -1$ die verallgemeinerten harmonischen Zahlen sind.

Daniel Fritze, Berlin, D

Aufgabe 1354: Sei p eine Primzahl und seien l, s, t natürliche Zahlen. Beweise, dass

$$\binom{sp^l}{tp} \equiv \binom{sp^{l-1}}{t} \pmod{p^l}.$$

Juliane Hansmann, Kiel, D

Aufgabe 1355 (Die einfache dritte Aufgabe): Auf wie viele Arten lassen sich die weissen, quadratischen Felder eines in der Ebene fixierten $m \times n$ -Gitters ($m, n \in \mathbb{N}$) derart mit schwarzer Farbe bemalen, dass die entstandene Figur Zentralsymmetrie (bezüglich der Rechtecksmitte) aufweist?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1351 (Korrektur zu Heft 2, 2016): Für die natürlichen Zahlen n und k sei

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{kn - in}{k+2}.$$

Man werte die Summe $S(n, k)$ geschlossen aus.

Michael Vowe, Therwil, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2015

Aufgabe 1341. Für $|q| < 1$ zeige man die Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n(4n+1)} + q^{(2n+1)(4n+1)}.$$

Gleb Glebov, Burnaby, CAN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von 11 Lesern eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Volkhart Schindler (Berlin, D), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Leser verwenden das Jacobische Tripelprodukt. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*.

Setzt man im Jacobischen Tripelprodukt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z) \left(1 + \frac{x^{2n-1}}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} z^n$$

$x^2 = q$, $z = \sqrt{q}$, so erhält man

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n)(1 + q^{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} q^{n/2}$$

oder wenn man links für $n = 1$ den dritten Faktor nach rechts nimmt und links neu gruppiert

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^3 q^{(4p+s)(4p+s+1)/2} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2p(4p+1)} + q^{(2p+1)(4p+1)} + q^{(2p+1)(4p+3)} + q^{(2p+2)(4p+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2p(4p+1)} + q^{(2p+1)(4p+1)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{(2k+1)(4k+3)} + q^{(2k+2)(4k+3)} \\
&= 2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2p(4p+1)} + q^{(2p+1)(4p+1)},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Summanden $k = -p - 1$ substituiert und die Summationsreihenfolge umgekehrt wurde. Insgesamt ergibt sich daher die Behauptung.

Aufgabe 1342. Im Tiefbau werden für Kanalisationsschächte konische, starkwandige Betonrohre verwendet. Es sind (hohle) schiefe Kreiskegelstümpfe, deren kürzeste Mantellinie senkrecht zu den beiden Kreisebenen steht. Das Zementwerk bringt am oberen Teil der längsten Mantellinie eine Öse so an, dass das am Kranseil aufgehängte Werkstück präzise mit horizontalem Leitkreis schwebend auf das vorbereitete, nasse (horizontale) Zementfundament aufgesetzt werden kann.

Man berechne für einen solch beschriebenen Hohl-Kreiskegelstumpf mit den Grundkreisradien R , $R + d$ und Schachtdeckelradien r , $r + d$ ($0 < d \ll r < R$) sowie der Höhe H (Länge der kürzesten Mantellinie) den Ort für die Öse mit der beschriebenen Eigenschaft auf der längsten Mantellinie des Kegelstumpfes. Man formuliere auch die Bedingung für die Grössen R , r , d und H , sodass der Haken wirklich auf dem Kegelstumpf angebracht werden kann.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 8 Leser haben Beiträge zugesandt: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

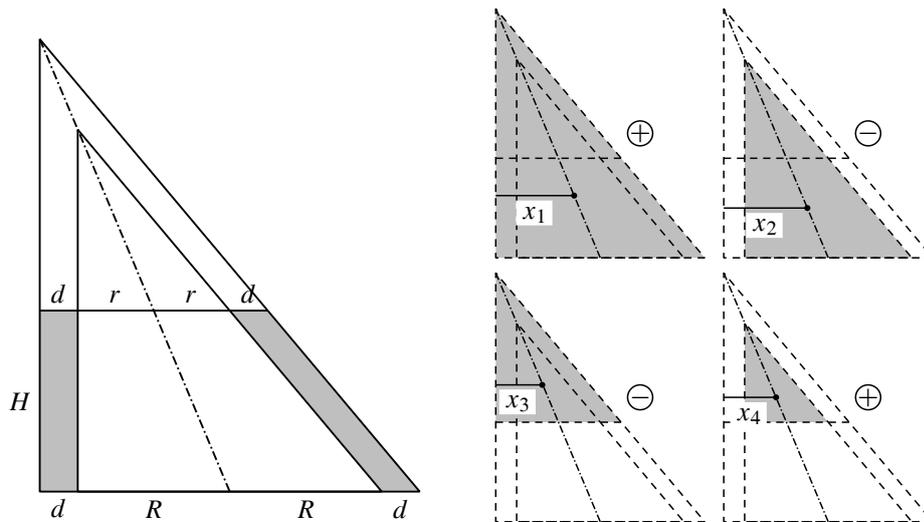
Es ist allen Lesern klar, dass man im Prinzip nur den Schwerpunkt des hohlen Kreiskegelstumpfes berechnen muss. Dieser Schwerpunkt lässt sich einerseits durch Integrale berechnen oder man kann ihn aus den Schwerpunkten der Teilkörper zusammensetzen. Das letztere Verfahren wandte *Gerhard Wanner*, dessen Lösung wir folgen, erfolgreich an.

Für den Schwerpunkt ist nur die x -Koordinate gesucht (siehe Figur). Nach dem Archimedischen Gleichgewichtssatz gilt für den gemeinsamen Schwerpunkt x von zwei zusammengesetzten Körpern der Massen M_1 und M_2

$$x = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Man denkt sich den Hohl-Kegelstumpf aus vier Kegeln mit positiven und negativen Massen zusammengesetzt (Figuren rechts). Vom ganzen Kegel mit Masse M_1 wird der innere mit Masse M_2 abgezogen und dann noch die Spitze mit Masse M_3 . Das Innere der Spitze mit Masse M_4 wurde dabei zweimal abgezogen, deshalb wird es wieder einmal hinzu addiert. So erhält man

$$x = \frac{x_1 M_1 - x_2 M_2 - x_3 M_3 + x_4 M_4}{M_1 - M_2 - M_3 + M_4}.$$



Alle vier Kegel sind zueinander ähnlich, deshalb sind ihre Massen kubisch zu den Grundkreisradien. Nach Commandino (1565) liegt der Schwerpunkt eines Kegels auf der Achse auf Viertelhöhe. Deshalb kann man mit den Werten

$$M_1 = (R + d)^3 \quad M_2 = R^3 \quad M_3 = (r + d)^3 \quad M_4 = r^3$$

$$x_1 = \frac{3}{4}(R + d) \quad x_2 = \frac{3}{4}R + d \quad x_3 = \frac{3}{4}(r + d) \quad x_4 = \frac{3}{4}r + d$$

rechnen und vereinfachen. Dabei ergibt sich

$$x = \frac{4R^2 + 4Rr + 4r^2 + 9Rd + 9rd + 6d^2}{6(R + r + d)}.$$

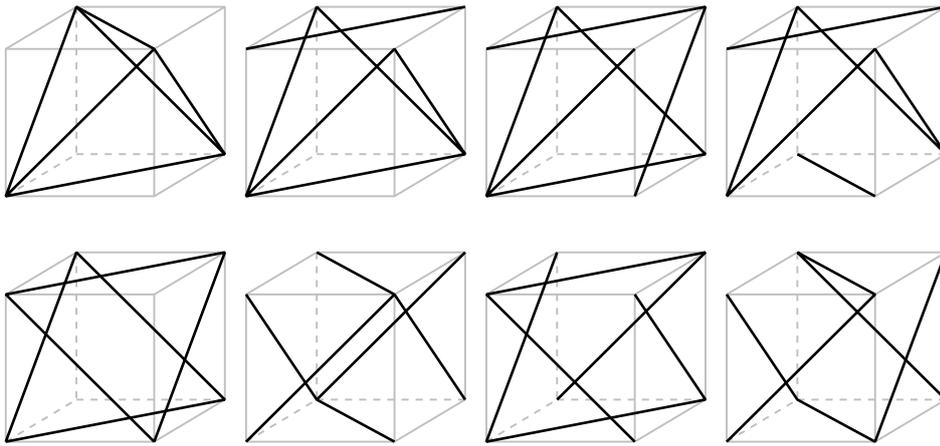
Die Bedingung, ob die Öse aussen am Mantel angebracht werden kann, also $x \geq 2(r + d)$, wird nach Vereinfachung

$$4R^2 \geq 8Rr + 8r^2 + 3Rd + 15rd + 6d^2.$$

Aufgabe 1343 (Die einfache dritte Aufgabe). Ein (dreidimensionaler) Würfel ist *geschmückt*, wenn auf jeder Seitenfläche eine Diagonale eingezeichnet ist. Wie viele verschiedene geschmückte Würfel gibt es?

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 9 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Gerhard Bachmaier (Graz, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Rolfdieter Frank (Koblenz, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).



Die Lösungsversuche zerfallen in zwei Kategorien. Entweder argumentiert man mit dem Lemma von Burnside oder man versucht die Schmückungen auf eine andere Art zu kategorisieren. Je nachdem ob man kongruente oder nur gleichsinnig kongruente Schmückungen identifiziert, bekommt man eine verschiedene Anzahl von Möglichkeiten. Wir folgen der Lösung von *Rolfdieter Frank*.

Vier paarweise nicht benachbarte Würfecken sind die Ecken eines Tetraeders. Die sechs Tetraederkanten sind Diagonalen der Würfel­flächen, sodass ein geschmückter Würfel entsteht. Die übrigen nicht kongruenten geschmückten Würfel entstehen, indem man eine, zwei oder drei Tetraederkanten durch die jeweils andere Flächendiagonale des Würfels ersetzt. Mehr als drei Tetraederkanten braucht man nicht zu ersetzen, denn durch Ersetzen aller sechs Kanten entsteht ein kongruenter Tetraeder.

Ersetzt man genau eine Tetraederkante, so erhält man stets kongruente geschmückte Würfel, egal welche Kante ersetzt wird.

Um zwei Tetraederkanten zu ersetzen, gibt es genau zwei nicht kongruente Möglichkeiten, nämlich zwei Kanten mit gemeinsamer Ecke oder zwei Kanten ohne gemeinsame Ecke.

Beim Ersetzen von drei Tetraederkanten gibt es genau drei nicht kongruente Möglichkeiten, nämlich drei Kanten mit gemeinsamer Ecke, drei Kanten eines Dreiecks oder drei Kanten eines offenen Kantenzuges. Damit hat man alle nicht kongruenten Möglichkeiten ausgeschöpft und hat $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ geschmückte Würfel erhalten.

Nur das Ersetzen von drei Kanten eines offenen Kantenzuges führt zu einem chiralen geschmückten Würfel, denn jeder der übrigen sechs geschmückten Würfel hat mindestens eine Spiegel- oder Drehspiegelsymmetrie. Zusammen mit dem Spiegelbild des einzigen chiralen geschmückten Würfels gibt es also genau 8 paarweise nicht gleichsinnig kongruente geschmückte Würfel.