Elem. Math. 71 (2016) 174 – 178
0013-6018/16/040174-5
DOI 10.4171/EM/314

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2017 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1356: Zeige, dass für jede rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gilt:

$$\left|\sqrt{3} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Yagub N. Aliyev, Khyrdalan, AZ

Aufgabe 1357: Sei P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC. Man beweise

$$\frac{PA^2}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{PB^2}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{PC^2}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \geq 2,$$

wobei a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks sind. Wann gilt Gleichheit?

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Aufgabe 1358 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl. Man zeige, dass

$$\mathrm{ggT}(a^2 - a, p) = 1 \quad \Rightarrow \quad p \mid \left(\sum_{i=0}^{p-2} a^i\right).$$

Gilt auch die Umkehrung?

Hans Brandstetter, Wien, A

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2015

Aufgabe 1344. Es sei n eine positive ganze Zahl und

$$a_n = \frac{(n!\,\omega_n)^{1/n}}{2},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeuten soll. Man zeige, dass $a_n < \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2$.

René Ellenberger, Gümligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 15 Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Fribourg, CH), Martin Lukarevski (Skopje, MK), Volkhard Schindler (Berlin, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser drücken das Volumen durch die Gammafunktion aus und arbeiten dann mit der Stirlingformel um die Ungleichung zu zeigen. Wir folgen der Lösung von *Gerhard Wanner*, der diese Idee sehr klar aber etwas weniger formal darlegt.

Das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, das man am besten durch Induktion $n \to n+2$ berechnet, hat jedes zweite Mal eine um eins höhere Potenz von π. Da Euler 1729 entdeckte, dass $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist, kann man alle Formeln für die Einheitskugel einheitlich als

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}!}$$

schreiben. Da wir bequem sind, benützen wir sowohl für $n!$ als auch für $\frac{n}{2}!$ die Stirlingsche Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ und brauchen nur alles einzusetzen und zu vereinfachen. Wir erhalten

$$a_n \approx \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \cdot \sqrt{n}.$$

Da $\sqrt[2n]{2}$ sehr schnell gegen 1 konvergiert und $\sqrt{\frac{\pi}{2e}} = 0.76017\ldots$ weit von 1 entfernt ist, haben wir keine Sorgen, die geforderte Abschätzung nötigerweise mit dem Fehlerglied $e^{1/12n}$ der Stirlingschen Formel auch rigoros zu machen.

Bemerkung: Einige Löser fügen an, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$, wie man das auch oben mühelos sehen kann.

Aufgabe 1345. Man bestimme alle 5-Eckzahlen, die auch 6-Eckzahlen sind.

Janny C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 13 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr

(Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösung der Aufgabe führt in direkter Weise auf eine Pellsche Gleichung, die mit bekannten Methoden gelöst werden kann. Die Lösungen unterscheiden sich dann nur in der Ausführlichkeit dieser Darstellung. Wir folgen *Jürgen Spilker*.

Die m-te 5-Eckzahl ist $a_m = \frac{m(3m-1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ und die n-te 6-Eckzahl ist $b_n = 2(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$24(a_m - b_n) = (6m-1)^2 - 3(4n-1)^2 + 2.$$

Also bekommt man die natürlichen Zahlen m, n mit $a_m = b_n$, indem man die Lösungen der Pellschen Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = -2$$

in natürlichen Zahlen $u \geq 5$, $u \equiv 5 \mod 6$ und $v \geq 3$, $v \equiv 3 \mod 4$. bestimmt. Die quadratische Form $x^2 - 3y^2$ hat die Grundmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Also genügen die Lösungen von $u^2 - 3v^2 = -2$ in natürlichen Zahlen der Rekursion

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 3v_k \\ v_{k+1} &= u_k + 2v_k \end{aligned}\right\} \quad u_1 = v_1 = 1,\ k \geq 1.$$

Das zugehörige Restklassenpaar tritt mit Periode 4 auf

k	1	2	3	4	5	6	...
$u_k \mod 6$	1	5	1	5	1	5	
$v_k \mod 4$	1	3	3	1	1	3	

Mit $U_k = u_{4k-2}$, $V_k = v_{4k-2}$ wird

$$\left.\begin{aligned} U_{k+1} &= 97U_k + 168V_k \\ V_{k+1} &= 56u_k + 97V_k \end{aligned}\right\} \quad U_1 = 5, V_1 = 3,\ k \geq 1.$$

Also gilt $a_m = b_n$ genau dann, wenn

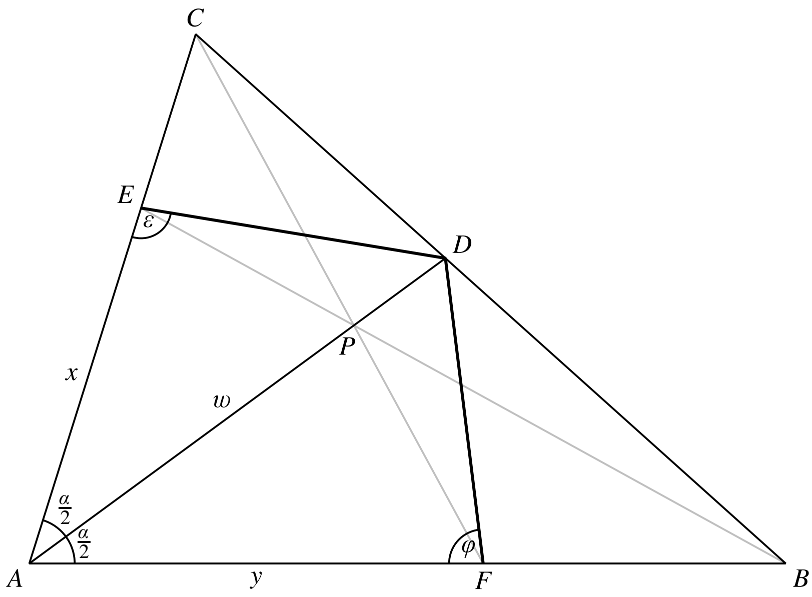
$$m = \frac{U_k + 1}{6},\ n = \frac{V_k + 1}{4}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beispiele: $a_1 = 1 = b_1$, $a_{165} = 40\,755 = b_{143}$, $a_{31977} = 1\,533\,776\,805 = b_{27693}$.

Bemerkung: Ein Leser bemerkt, dass die Lösung auch im Artikel: Chu, W., Regular Polygonal Numbers and Generalized Pell Equation, *International Mathematical Forum* 2 (2007) 16, 781–802, publiziert ist.

Aufgabe 1346 (Die einfache dritte Aufgabe). Sei ABC ein Dreieck mit $b \neq c$ und schneide die Winkelhalbierende von α die Seite BC im Punkt D.

a) Man zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt P im Innern auf AD so gibt, dass die Ecktransversalen BE und CF durch P gehen und $DE = DF$ gilt.



b) Man schliesse, dass in diesem Fall das Dreieck DEF nur dann gleichseitig ist, wenn $\alpha = 120°$ ist.

Mowaffaq Hajja, Irbid, JOR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Zuschriften von folgenden 13 Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Georghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Volkhard Schindler (Berlin, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die Aufgabe verführt zur Annahme, dass die Strecken AF und AE gleich lang seien, wenn $DE = DF$ gilt. Tatsächlich ist aber Viereck $AFDE$ in diesem Fall ein Sehnenviereck und $AF = AE$ tritt nur im gleichschenkligen Fall $b = c$ ein. Die Existenz und Eindeutigkeit des Punktes P kann entweder durch die Analyse einer Gleichung oder durch ein Stetigkeitsargument (Mittelwertsatz) gewonnen werden, wie es auch *Moritz Adelmeyer* handhabt.

O.b.d.A. sei $b < c$. Es ist bekannt, dass der Punkt D die Seite BC im Verhältnis $c : b$ teilt und dass $w = AD = \frac{2bc}{b+c} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ gilt. Im Folgenden betrachten wir die Grösse $s = x + y = AE + AF$ (siehe Figur).

Gemäss dem Satz von Ceva gilt

$$\frac{x}{b-x} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{c-y}{y} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x}{b-x} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c-y}{y} = 1.$$

Diese Beziehung kann umgeformt werden zu

$$(c-b)xy = bc(y-x).$$

Unter der Annahme $b < c$ (und $0 < x, 0 < y$) wird die linke Seite positiv und man folgert, dass dann auch $x < y$ gelten muss, damit die rechte Seite positiv wird.

Aus dem Cosinussatz in den Dreiecken AED und AFD folgt

$$DE^2 = x^2 + w^2 - 2xw\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad DF^2 = y^2 + w^2 - 2yw\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

Im Fall $DE = DF$ ergibt sich daraus

$$y^2 - x^2 = 2(y-x)w\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

Wenn P im Innern von AD liegt, so ist $y - x \neq 0$ und $DE = DF$ ist äquivalent zu

$$s = x + y = 2w\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

Dieser Wert kann via die bekannte Ungleichung zwischen harmonischem und arithmetischem Mittel für $b \neq c$ und $0° < \alpha < 180°$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$s = 2w\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) < 2\cdot\frac{b+c}{2}\cdot 1 = b + c.$$

Wenn P entlang von A nach D wandert, so ändert sich $s = AE + AF$ stetig und nimmt monoton von $s = 0$ bis $s = b + c$ zu. Daraus folgt, dass es genau einen Punkt P im Innern von AD mit $DE = DF$ gibt, was Teil a) beweist.

Für $DE = DF$ haben die Dreiecke AED und AFD die Seite w, den an w anliegenden Winkel $\alpha/2$ und die $\alpha/2$ gegenüberliegende Seite gemeinsam. In dieser SSW-Situation sind die Winkel $\varepsilon = \sphericalangle AED$ und $\varphi = \sphericalangle AFD$ entweder gleich oder supplementär. Im ersten Fall wären die Dreiecke AED und AFD kongruent, was wegen $x < y$ aber ausgeschlossen ist. Es liegt also der Fall $\varepsilon + \varphi = 180°$ vor und wenn DEF gleichseitig ist, muss daher $\alpha = 120°$ sein.