
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2017 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden; für die Aufgabe 1359A ist kein Termin gesetzt. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1359: Für $n \geq 4$ werden die Ecken eines n -Ecks mit den Zahlen $1, \dots, n$ irgendwie beschriftet (bijektive Zuordnung). Für die meisten Zahlen n , im Folgenden brav genannt, gilt nun:

Bei jeder möglichen Anordnung gibt es drei benachbarte Zahlen, deren Summe echt grösser als $S_n = \frac{3}{2}(n+1) + 1$ ist, wobei S_n als die um 1 vergrösserte durchschnittliche Dreiersumme aufgefasst werden kann.

- Für die Zahlen $4 \leq n \leq 9$ findet man durch Probieren leicht, dass, $n = 4, 7, 8$ brav und $n = 5, 6, 9$ böse, d.h. nicht brav sind. Man gebe für $n = 5, 6, 9$ jeweils ein Gegenbeispiel an.
- Man zeige, dass alle Zahlen $n \geq 7$, die nicht kongruent $3 \pmod{6}$ sind, brav sind. Bemerkung: Im Bundeswettbewerb Mathematik 2002, 1. Runde (Deutschland) war die Aufgabe für $n = 12$ zu lösen.
- Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass auch die Zahl $n = 15$ böse ist.

Aufgabe 1359A: Vermutung: Auch unter den Werten kongruent $3 \pmod{6}$ gibt es nach der 15 keine weitere böse Zahl mehr.

Hans Humenberger, Wien, A und Berthold Schuppar, Dortmund, D

Aufgabe 1360: Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) \geq 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Zeige, dass

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \geq f\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}.$$

Marcel Chiriță, Bukarest, RO

Aufgabe 1361 (Die einfache dritte Aufgabe): Die zehn Dominosteine mit den Augenzahlen 00, 01, 02, 03, 11, 12, 13, 22, 23, 33 sind als 10×2 -Rechteck so auszulegen, dass die Augensummen in den beiden Zeilen gleich sind, weitere Regeln gibt es nicht. In den folgenden drei Fällen ist jeweils die Anzahl möglicher „Augenbilder“ anzugeben.

- Die Steine werden horizontal ausgelegt.
- Die Steine werden vertikal ausgelegt.
- Die Steine mit gleichen Augenzahlen werden vertikal, die anderen Steine horizontal ausgelegt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2016

Aufgabe 1347. Man berechne

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} J(n),$$

dabei ist $J(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}$.

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 11 Leser haben Lösungen eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Martin Lukarevski (Skopje, MK), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die eingereichten Lösungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Entweder wird mit bekannten Identitäten der Riemannschen Zetafunktion operiert oder die Summe wird durch eine Potenzreihe hergeleitet. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der mit der zweiten Methode arbeitet.

Sei

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} = (-1)^n \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Es ist $a_1 = 0$, also kann man auch ab $n = 1$ summieren und erhält

$$f(x) = \frac{2}{x} (\ln(1+x) - x) + \ln(1+x) = \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \ln(1+x) - 2, \quad (1)$$

wobei man $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\ln(1+x)$ benutzt hat.

Wegen $J(n) = \sum_{m \geq 1} m^{-n}$ ist die betrachtete Summe nach Umstellung der Summationsreihenfolge $S = \sum_{m \geq 1} f\left(\frac{1}{m}\right)$. Aus (1) berechnet man

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = (2m+1) \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - 2 = (2m+1)(\ln(m+1) - \ln(m)) - 2,$$

das heisst

$$S_M = \sum_{m=1}^M f\left(\frac{1}{m}\right) = (2M+1)\ln(M+1) - 2\ln(M!) - 2M. \quad (2)$$

Die Stirlingsche Formel $M! \approx M^{M+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{-M}$ führt zu

$$2\ln(M!) = (2M+1)\ln(M) + \ln(2\pi) - 2M + \varepsilon_M \quad (\varepsilon_M \rightarrow 0),$$

und somit aus (2)

$$S_M = (2M+1)(\ln(M+1) - \ln(M)) - \ln(2\pi) - \varepsilon_M = (2M+1)\ln\left(1 + \frac{1}{M}\right) - \ln(2\pi) - \varepsilon_M.$$

Mit $e = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$ folgt schliesslich

$$S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M = 2 - \ln(2\pi).$$

Bemerkung: *Walther Janous* verallgemeinert die Reihe zu

$$S(w) = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n+w}{n(n+1)} J(n)$$

und zeigt $S(w) = \frac{1+w}{2}\gamma + (1-w)(1 - \ln(\sqrt{2\pi}))$, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

Aufgabe 1348. Im Dreieck ABC seien R, r der Um- bzw. der Inkreisradius. Die Eulersche Ungleichung $R \geq 2r$ impliziert $\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Man beweise die folgende Interpolationsungleichung

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

die die Ungleichung aus Aufgabe 1232 (Elem. Math. 61, 2006) verschärft.

Martin Lukarevski, Skopje, MK

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die meisten Leser lösen die Aufgabe mit mehr oder weniger bekannten Identitäten und Ungleichungen im Dreieck. So handhabt es auch *Peter Nüesch*, der zugleich, wie auch andere Leser, eine Verschärfung beweist.

Mit den Identitäten

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) = \frac{sr}{2R^2} \quad \text{und} \quad 1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2}$$

erhält man

$$\frac{\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)} = \frac{4sr}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Mit den Ungleichungen $s \geq 3\sqrt{3}r$ und $\frac{4}{3}s^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ (siehe z.B. O. Bettema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1969) erhält man die Kette

$$\frac{4r^2}{\sqrt{3}R^2} \leq \frac{4sr}{9R^2} \leq \frac{4sr}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{3r}{s} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 1349 (Die einfache dritte Aufgabe). G bezeichne die Menge aller minimalen Gitterwege w , die im ebenen Koordinatengitter im Punkt $(0, 0)$ starten, zu einem Punkt $P(i, m)$ auf der Geraden $y = m$ aufsteigen und von P aus zum Punkt $(n, 0)$ absteigen. (Die Variable i variiert dabei von 0 bis n und die beiden Äste dürfen auf der Geraden $x = i$ gemeinsame Segmente haben.) Jeder solcher Weg w berandet zusammen mit der x -Achse ein polygonales Gebiet mit Flächeninhalt $A(w)$. Man berechne $A(n, m) = \sum A(w)$, wobei sich die Summe über alle Wege aus G erstreckt.

Janny C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Fritz Siegerist (Künsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

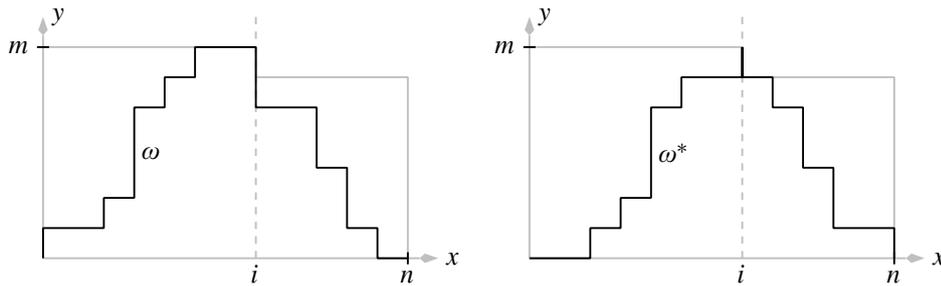
Diese Aufgabe erwies sich schwieriger als gedacht. Ausserdem wurde sie auch verschiedenen interpretiert. So wie sie der Aufgabensteller gedacht hat, konnte man mit einem Symmetrieargument (Flächen aller aufsteigenden Äste gleich Flächen aller absteigenden Äste) die Berechnung vereinfachen. Es stellt sich dann aber heraus, dass der gleiche Weg mehr als einmal gezählt wird. Interessanter ist aber die Frage, wenn jeder Weg genau einmal gezählt wird. Wir folgen der Lösung von *Fritz Siegerist*, der die Aufgabe so bearbeitet hat.

Jeder solche Gitterweg hat $2m + n$ Segmente, wovon deren n parallel zur x -Achse verlaufen. Es gibt daher $|G| = \binom{2m+n}{n}$ solche Wege.

Zu jedem Weg ω mit fester grösster Maximalstelle i (siehe gestrichelte Achse in der Figur) gibt es einen komplementären Weg ω^* mit je um 180° gedrehten auf- bzw. absteigenden Abschnitten, wobei ω^* gleich ω sein kann. Dabei gilt für jedes i , dass $A(\omega) + A(\omega^*) = mn - (n - i)$.

Für alle Wege ω mit festem Wert i ist der Mittelwert von $A(\omega)$ somit

$$A_i = \frac{mn - (n - i)}{2}$$



und die Anzahl dieser Wege mit festem i ist

$$k_i = \binom{m+i}{i} \binom{m-1+n-i}{n-i}.$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} A(n, m) &= \sum_{i=0}^n A_i k_i = \frac{mn-n}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n k_i \right)}_{|G|} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i \binom{m+i}{i} \binom{m-1+n-i}{n-i} \\ &= \frac{mn-n}{2} \binom{2m+n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m+1) \binom{m+i}{i-1} \binom{m-1+n-i}{n-i} \\ &= \frac{mn-n}{2} \binom{2m+n}{n} + \frac{m+1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{m+i}{i-1} \binom{m-1+n-i}{n-i}}_{(*)} \\ &= \frac{mn-n}{2} \cdot \frac{2m+1}{n} \binom{2m+n}{n-1} + \frac{m+1}{2} \binom{2m+n}{n-1} \\ &= m^2 \binom{2m+n}{n-1}. \end{aligned}$$

Die Summe (*) deutet man als Anzahl aller Wege, wenn man bei $(1, -1)$ statt bei $(0, 0)$ startet und dann ebenfalls über (i, m) nach $(n, 0)$ geht. Die Anzahl aller solchen Wege ist $\binom{2m+n}{n-1}$.